

Extension de fibrés vectoriels et profondeur

Helmut A. Hamm (Münster)

1 Introduction

Dans SGA2, A.Grothendieck a démontré des théorèmes de Lefschetz par voie algébrique, en particulier pour le groupe fondamental (algébrique) et le groupe de Picard [G2]. Les outils essentiels sont: conditions de profondeur, cohomologie locale, théorèmes de finitude et d'annulation,... Un des ingrédients est le théorème d'annulation suivant, en fixant un corps k :

1.1 Théorème. (*[G2] XII Cor. 1.4*) Soit X un schéma projectif sur k , \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur X , $\text{prof } \mathcal{S} \geq n$. Soit \mathcal{L} un faisceau très ample sur X . Alors $H^q(X, \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-l}) = 0$ pour $q < n$, $l \gg 0$.

Ici, $\text{prof } \mathcal{S} \geq n$ signifie que $\text{prof } \mathcal{S}_x \geq n$ pour tout point fermé x de X , où $\text{prof } \mathcal{S}_x$ est la profondeur du $\mathcal{O}_{X,x}$ -module \mathcal{S}_x . Naturellement il suffit de supposer que \mathcal{L} est ample.

Ce théorème était utilisé, par exemple, afin de démontrer un théorème de Lefschetz pour le groupe de Picard d'une variété projective ([G2] XII Cor. 3.6). En partie les résultats y concernent, plus généralement, des fibrés vectoriels.

Le but de l'article présent est le passage du cas projectif au cas quasi-projectif - à part du traitement du cas analytique complexe correspondent. On ne va que préparer ici le traitement du groupe de Picard et se concentrer sur le cas des fibrés vectoriels: une situation plus générale où les résultats sont plus fragmentaires.

En fait, on trouve déjà un passage sur le cas quasi-projectif chez Grothendieck ([G2], XII.5), mais en ce qui concerne notre genre de question il n'y a qu'une remarque qui se borne au cas où la variété quasi-projective est le complémentaire d'un nombre fini de points (loc.cit., 5.6).

Le passage du cas d'une variété projective à celui d'un schéma quasi-projectif nécessite une condition de finitude. On va choisir une formulation de celle-ci qui était utilisée dans le cas complexe analytique par Trautmann et Siu, voir e.g. [BS]. Ceci marche dans notre contexte parce que nous avons un schéma de Jacobson, voir [G3], comment on va le voir. On définit donc, pour un faisceau algébrique cohérent \mathcal{S} sur un schéma Y :

$$S_m(\mathcal{S}) = \{x \in Y \text{ fermé} \mid \text{prof } \mathcal{S}_x \leq m\}.$$

On constate qu'en fait le théorème en haut s'insère dans un théorème de finitude général, en passant de la variété projective au cône époiné correspondant. Ainsi le théorème d'annulation en haut se généralise comme suit:

1.2 Théorème. Soit k un corps, X un schéma projectif sur k , Y un sous-espace algébrique fermé, \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur $X \setminus Y$, \mathcal{L} un faisceau ample sur X . Supposons que $\text{prof } \mathcal{S} \geq m$ et que \mathcal{S} vérifie la condition suivante de finitude F_m :

$\dim Y \cap \overline{S_l(\mathcal{S})} < l - m$ pour tout $l \leq m + \dim Y$.

Alors $H^s(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_{X \setminus Y}} \mathcal{L}^{-\nu} |_{X \setminus Y}) = 0$, $s < m, \nu \gg 0$.

Dans cet article nous posons $\dim \emptyset := -\infty$. Pour la condition F_m voir les conditions équivalentes de Proposition 2.1.

Dans section 4 on va appliquer ce genre de résultats au semi-anneau $\text{Vect } X$ des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels algébriques sur X . En particulier on va obtenir le théorème suivant:

1.3 Théorème. Soit $X \subset \mathbb{P}_N(k)$ un sous-schéma projectif sur k , Y une partie fermée, H un hyperplan défini par un faisceau d'idéaux \mathcal{I} tel que $\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{I}\mathcal{O}_X$. Soit \hat{X} la complétion de X le long de $X \cap H$. Supposons $\text{prof } \mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y} \geq 2$ et que $\dim \overline{S_l(\mathcal{O}_{X \setminus Y})} \cap Y \cap H < l - 3$ pour tout $l \leq \dim Y \cap H + 3$. Alors

$$\varinjlim \text{Vect } U \simeq \text{Vect}(\hat{X} \setminus \hat{Y}) \simeq \varprojlim \text{Vect}(X_n \setminus Y_n)$$

où U parcourt les voisinages ouverts de $X \cap H \setminus Y$ dans $X \setminus Y$, $n \in \mathbb{N}$ et X_n est le n -ième voisinage infinitésimal de $X \cap H$ dans X .

On peut donc approximer $\text{Vect } \hat{X} \setminus \hat{Y}$ de deux côtés.

Il y a un cas où on a une information un peu plus précise:

1.4 Théorème. Soit $\text{codim}_X Y \geq 3$ et $X \setminus Y$ une intersection complète dans $\mathbb{P}_N(k) \setminus Y$, c.-à d. peut être définie par $N \setminus \dim X$ équations, $\dim X \setminus Y \geq 3$. Soit \mathcal{E} un fibré vectoriel sur $X \setminus Y$. Alors \mathcal{E} est trivial si et seulement si la restriction algébrique à $X \cap H \setminus Y$ est trivial.

Ce théorème permet de restreindre la question de trivialité au cas de fibrés vectoriels sur une surface.

Il y a des renseignements plus précis pour le groupe de Picard. En particulier on va déduire dans section 5 le théorème de type de Lefschetz suivant:

1.5 Théorème. Soit X un sous-schéma projectif de $\mathbb{P}_N(k)$, Y un fermé de Zariski dans X de codimension ≥ 4 , $X \setminus Y$ une intersection complète dans $\mathbb{P}_N(k) \setminus Y$ de dimension ≥ 3 . Alors $\text{Pic}(X \setminus Y) \simeq \mathbb{Z}$.

Dans le cas $k = \mathbb{C}$ nous pouvons comparer avec le cadre analytique. Soit X^{an} l'espace analytique complexe qui correspond au schéma projectif complexe X .

1.6 Théorème. Soit $X \subset \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ un sous-schéma projectif, Y une partie fermée, H un hyperplan défini par un faisceau d'idéaux \mathcal{I} tel que $\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{I}\mathcal{O}_X$. Soit $\dim S_{l+2}(\mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y}) \leq l$ pour $l \leq \dim Y \cap H$. Alors on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc}
\lim_{\rightarrow} Vect U & \xrightarrow{\simeq} & Vect(\hat{X} \setminus \hat{Y}) & \xrightarrow{\simeq} & \lim_{\leftarrow} Vect(X_n \setminus Y_n) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\lim_{\rightarrow} Vect U^{an} & \xrightarrow{\simeq} & H^1(X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}, Gl(\mathcal{O}_{X^{an}})) & \xrightarrow{\simeq} & Vect(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}) & \xrightarrow{\simeq} & \lim_{\leftarrow} Vect(X_n^{an} \setminus Y_n^{an})
\end{array}$$

où U parcourt les voisinages (de Zariski) de $X \cap H \setminus Y$ dans $X \setminus Y$.

1.7 Théorème. Soient X, Y, H comme dans Théorème 1.6. Supposons $\text{codim}_X Y \geq 3$, $\text{codim}_X \text{Sing}(X \setminus Y) \geq 3$, $\dim S_l(\mathcal{O}_{X \setminus Y}) \leq l - 2$ pour $l < \dim X$. Soit \mathcal{E} un fibré vectoriel sur $X \setminus Y$. Alors \mathcal{E} est trivial si et seulement si la restriction analytique de \mathcal{E}^{an} à $X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}$ est triviale.

Ce théorème permet pour la question de trivialité une réduction au cas d'une surface projective lisse.

La situation est meilleure quand on regarde des fibrés vectoriels à connexion intégrable. Soit $Vect_{ci}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels holomorphes à connexion intégrable, voir [D]. Alors

1.8 Théorème. Soit $X \subset \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ un sous-schéma projectif, Y une partie fermée, $X \setminus Y$ lisse, partout de dimension ≥ 3 , H un hyperplan transverse à $X \setminus Y$, $\text{codim}_X Y \cap H \geq 3$. Alors on a un diagramme commutatif d'isomorphismes:

$$\begin{array}{ccc}
Vect_{ci}(X \setminus Y) & \simeq & Vect_{ci}(X \cap H \setminus Y) \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
Vect_{ci}(X^{an} \setminus Y^{an}) & \simeq & Vect_{ci}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an})
\end{array}$$

Notons qu'ici une connexion intégrable sur un fibré vectoriel sur $X \setminus Y$ ou bien $X \cap H \setminus Y$ est automatiquement régulière.

Le travail présenté ici est dans la partie purement algébrique basée sur une lecture détaillée du travail admirable de Grothendieck [G2].

La partie sur le cas analytique et la comparaison algébrique/analytique a des racines complètement différentes: le travail de Trautmann et Siu. Il y a ici des techniques d'extension liées à une figure de Hartogs, après tout on constate qu'elles sont applicables. Des méthodes semblables sont déjà utilisées afin d'obtenir des théorèmes du type de Zariski-Lefschetz [Ha1] et pour le groupe de Picard local [Ha2] ou les groupes de Chow [Ha3]. Certains résultats de cet article sont utilisés pour le groupe de Picard des variétés projectives [HL2]. Notons que dans le cas complexe on dispose d'autres méthodes transcendentes encore.

2 Conditions de finitude et d'annulation

a) Conditions de finitude

La possibilité de travailler avec nos conditions de profondeur est basée sur l'observation suivante:

2.1 Lemme. Supposons que X est un schéma de Jacobson (voir [G3] I 6.4.1). Soit \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur X , $x \in X$. Alors:

- a) $\mathcal{S}_x \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{S}_z \neq 0$ pour tous les points fermés z de $\overline{\{x\}}$,
- b) Si X est localement sous-schéma d'un schéma régulier: $\text{prof } \mathcal{S}_x \leq l - \dim \overline{\{x\}} \Leftrightarrow$ tous les points fermés de $\overline{\{x\}}$ appartiennent à $S_l(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \text{prof } \mathcal{S}_z \leq l$ pour tout point fermé z de $\overline{\{x\}}$.

Rappelons que $S_l(\mathcal{S})$ était défini dans l'introduction.

Démonstration: a) Comme \mathcal{S} est cohérent on sait que le support de \mathcal{S} est fermé (voir [G3] 0, 5.2.2). Donc " \Rightarrow " est évident.

" \Leftarrow ": $\overline{\{x\}}$ et $\overline{\{x\}} \cap \text{supp } \mathcal{S}$ sont des fermés tels que l'intersection avec le sous-espace des points fermés de X coïncide. Par [G3] 0, 2.8.1 on conclut que $\overline{\{x\}} = \overline{\{x\}} \cap \text{supp } \mathcal{S}$, donc $\mathcal{S}_x \neq 0$.

b) Il suffit de considérer le cas où X est régulier de dimension n . Soit pd la dimension projective d'un anneau local. Alors:

$\text{prof } \mathcal{S}_x + pd \mathcal{S}_x = \dim \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} = n - \dim \overline{\{x\}}$, voir [H1] III Prop. 6.12 A. Or, $pd \mathcal{S}_x = \min\{j \mid j \geq 0, (\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^j(\mathcal{S}, \mathcal{O}_X))_x = 0 \text{ pour } i > j\}$, voir [H1] III Ex.6.6. Notons que $pd \mathcal{S}_x \leq n$.

Le faisceau $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^i(\mathcal{S}, \mathcal{O}_X)$ est cohérent. Donc:

$$\begin{aligned} z \in S_l(\mathcal{S}) &\text{ pour tous les points fermés } z \text{ de } \overline{\{x\}} \\ \Leftrightarrow \text{prof } \mathcal{S}_z \leq l &\text{ pour tous les points fermés } z \text{ dans } \overline{\{x\}} \\ \Leftrightarrow pd \mathcal{S}_z \geq n - l &\text{ pour tous les points fermés } z \text{ dans } \overline{\{x\}} \\ \Leftrightarrow \bigoplus_{n-l \leq i \leq n} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^i(\mathcal{S}, \mathcal{O}_X)_z \neq 0 &\text{ pour tous les points fermés } z \text{ dans } \overline{\{x\}} \\ \Leftrightarrow \bigoplus_{n-l \leq i \leq n} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^i(\mathcal{S}, \mathcal{O}_X)_x \neq 0 &\text{ (voir a))} \\ \Leftrightarrow pd \mathcal{S}_x \geq n - l \Leftrightarrow \text{prof } \mathcal{S}_x \leq l - \dim \overline{\{x\}}. \end{aligned}$$

Soient X, Y comme dans l'introduction et $j : X \setminus Y \rightarrow X$ l'inclusion.

Afin de démontrer Théorème 1.2 rappelons des résultats de finitude qui sont essentiellement dues à [T2], [G2]:

2.2 Proposition. Soit \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur $X \setminus Y$ et $j : X \setminus Y \rightarrow X$ l'inclusion. Pour $m \geq 1$, les conditions suivantes sont équivalentes:

- a) \mathcal{S} satisfait à la condition F_m : $\dim Y \cap \overline{S_l(\mathcal{S})} < l - m$ pour tout $l \leq m + \dim Y$,
- b) pour tout $x \in X \setminus Y$: $\text{prof } \mathcal{S}_x > m - c(x)$ avec $c(x) := \text{codim}\{\overline{\{x\}} \cap Y, \overline{\{x\}}\}$,
- c) pour $s < m$, $R^s j_* \mathcal{S}$ est cohérent.

Dans ce cas, $\dim H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}) < \infty$, $s < m$, pourvu que X est propre sur k .

Remarque: Il suffit de supposer que X est un schéma de type fini sur k : dans ce cas il s'agit d'un schéma de Jacobson qui est localement sous-schéma d'un schéma régulier.

On peut d'ailleurs supposer que $Y \subset \overline{\text{supp } \mathcal{S}}$; dans ce cas, (F_m) implique que $\text{codim}_X Y > m$ (posons $l = \dim X$).

Démonstration: b) \Leftrightarrow c): On peut supposer que $\mathcal{S} = \hat{\mathcal{S}}|_{X \setminus Y}$ où $\hat{\mathcal{S}}$ est cohérent sur X : d'abord, $j_* \mathcal{S}$ est quasi-cohérent, donc limite inductive de ses

sous-faisceaux cohérents, voir [G3] I 6.9.15. Notons que $\mathcal{H}_Y^0(\hat{\mathcal{S}})$ est cohérent: sous l'hypothèse b) ceci découle de [G2] VIII Cor. 2.3, sous l'hypothèse c) on sait que $j_*\mathcal{S} = j_*j^*\hat{\mathcal{S}}$ est cohérent, donc $\mathcal{H}_Y^0(\hat{\mathcal{S}})$ aussi. Alors c) est équivalent à la condition que $\mathcal{H}_Y^s\hat{\mathcal{S}}$ est cohérent pour $s \leq m$. On est donc ramené à un théorème de finitude de Grothendieck: [G2] VIII Cor. 2.3.

a) \implies b): Soit $x \in X \setminus Y$, $\dim \overline{\{x\}} = s$. Supposons que $\text{prof } \mathcal{S}_x \leq m - c(x)$: Alors tous les points fermés de $\overline{\{x\}} \setminus Y$ appartiennent à $S_{m-c(x)+s}(\mathcal{S})$, donc ceux de $\overline{\{x\}}$ à $S_{m-c(x)+s}(\mathcal{S})$, par Lemme 2.1. Ainsi, $s - c(x) = \dim \overline{\{x\}} \cap Y \leq \dim S_{m-c(x)+s}(\mathcal{S}) \cap Y < s - c(x)$ par hypothèse, contradiction.

b) \implies a): Soit $x \in X \setminus Y$ tel que les points fermés de $\overline{\{x\}}$ appartiennent à $S_l(\mathcal{S})$. Il faut montrer que $\dim \overline{\{x\}} \cap Y < l - m$. Mais $\text{prof } \mathcal{S}_x \leq l - s$, où $s := \dim \overline{\{x\}}$, par Lemme 2.1. Donc $\dim \overline{\{x\}} \cap Y = s - c(x) = (m - c(x)) + (s - m) < \text{prof } \mathcal{S}_x + (s - m)$ par hypothèse, donc $\dim \overline{\{x\}} \cap Y < (l - s) + (s - m) = l - m$. La conclusion est une conséquence de c).

Supposons maintenant que X est un sous-schéma de \mathbb{P}_r . On a $X = \text{Proj } A$, $Y = \text{Proj } B$, où A, B sont des k -algèbres graduées, on peut supposer $A_0 = B_0 = k$; soit $\tilde{X} := \text{Spec } A$, $\tilde{Y} := \text{Spec } B$, $\tilde{j} : \tilde{X} \setminus \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ l'inclusion, 0 le point qui correspond à l'idéal $\bigoplus_{k>0} A_k$. On a une projection $\pi : \tilde{X} \setminus \tilde{Y} \rightarrow X \setminus Y$. Soit $\tilde{\mathcal{S}} := \pi^*\mathcal{S}$.

2.3 Théorème. *Soit \mathcal{L} ample sur X et $m > 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- a) $\text{prof } \mathcal{S} \geq m$, et \mathcal{S} satisfait (F_m) ,
- b) $\tilde{\mathcal{S}}$ satisfait (F_m) ,
- c) $R^s\tilde{j}_*\tilde{\mathcal{S}}$ est cohérent pour $s < m$,
- d) $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}(n))$ est un $k[Z_0, \dots, Z_r]$ -module de type fini, $s < m$,
- e) pour tout $s < m$, on a:
 - (e₁) $H^s(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$, $n \ll 0$,
 - (e₂) $\dim H^s(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^n) < \infty$, $n \in \mathbb{Z}$,
 - (e₃) $\bigoplus_{n \geq 0} H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}(n))$ est un $k[Z_0, \dots, Z_r]$ -module de type fini.

Démonstration: a) \Leftrightarrow b): On a $\text{prof } \tilde{\mathcal{S}}_x = \text{prof } \mathcal{S}_{\pi(x)} + 1$. La condition (F_m) pour \mathcal{S} dit que $\dim Y \cap \overline{S_l(\mathcal{S})} < l - m$ pour tout $l \leq m + \dim Y$. Ceci signifie que $\dim \tilde{Y} \cap \overline{S_l(\tilde{\mathcal{S}})} \setminus \{0\} < l - m$ pour tout $l \leq m + \dim \tilde{Y}$. La condition $\text{prof } \tilde{\mathcal{S}}_x \geq m$ pour tout point fermé de $X \setminus Y$ dit que $S_l(\tilde{\mathcal{S}}) = \emptyset$, c.-à d. $\tilde{Y} \cap S_l(\tilde{\mathcal{S}}) = \emptyset$ pour $l \leq m$.

b) \Leftrightarrow c): voir Proposition 2.2.

c) \Leftrightarrow d): On sait de toute façon que les faisceaux $R^s\tilde{j}_*\tilde{\mathcal{S}}$ sont quasi-cohérents. Comme \tilde{X} est affine, on obtient donc que $H^0(\tilde{X}, R^s\tilde{j}_*\tilde{\mathcal{S}}) = H^s(\tilde{X} \setminus \tilde{Y}, \tilde{\mathcal{S}}) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}(n))$. En général, on sait que $H^0(\tilde{X}, R^s\tilde{j}_*\tilde{\mathcal{S}})$ est un $H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ -module de type fini si et seulement si $R^s\tilde{j}_*\tilde{\mathcal{S}}$ est cohérent, voir [H1] II Cor. 5.5. Or, $H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = A$, et A est quotient de $R := k[Z_0, \dots, Z_r]$. D'où le résultat.

d) \Rightarrow e): Soit \mathcal{L}^k très ample. L'équivalence a) \Leftrightarrow d) montre qu'on a les mêmes hypothèses pour $\mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^j$, $j = 0, \dots, k-1$, au lieu de \mathcal{S} . On peut donc supposer que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$.

La condition (e₁) est alors évidente. Comme R est noethérien, $M_n :=$

$\oplus_{k \geq n} H^s(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^k)$ est un R -module de type fini pour tout n , ce qui donne (e_3) pour $n = 0$. Le même vaut donc pour $M_n/M_{n+1} = H^s(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^n)$ aussi. Or, il s'agit en même temps d'un module sur $R/R_1 \simeq k$, donc d'un espace vectoriel sur k de dimension finie, on obtient donc (e_2) .
 $e) \Rightarrow d)$: clair.

Démonstration de Théorème 1.2: voir l'implication $a) \Rightarrow e_1)$ de Théorème 2.3.

En particulier, on obtient le corollaire de Théorème 1.2 suivant qui peut être démontré beaucoup plus facilement par voie directe:

2.4 Corollaire. *Soit X un schéma projectif sur k , Y un sous-espace algébrique fermé, \mathcal{L} un faisceau ample sur X , \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur $X \setminus Y$, $\text{prof } \mathcal{S} \geq n$. Alors $H^q(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_{X \setminus Y}} (\mathcal{L}|_{X \setminus Y})^{-\nu}) = 0$ pour $q < n - \dim Y - 1, \nu \gg 0$.*

En fait, il y a une extension cohérente de \mathcal{S} à X , on peut donc appliquer la méthode de la démonstration de [HL2] Théorème 2.1.

Le lemme suivant découle de Théorème 2.3 aussi, voir $a) \Rightarrow d)$, mais peut être démontré directement, voir Appendice:

2.5 Lemme. *Soit $\dim \overline{S_l(\mathcal{S})} \cap Y < l - m$ pour tout $l \leq m + \dim Y$, $\text{prof } \mathcal{S} \geq m$. Alors $\oplus_{n \in \mathbb{Z}} H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}(n))$ est un $k[Z_0, \dots, Z_r]$ -module de type fini pour $s < m$.*

2.6 Lemme. *Soit $\dim \overline{S_l(\mathcal{S})} \cap Y < l - 1$ pour tout $l \leq 1 + \dim Y$. Alors $\mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^n$ est engendré par $\Gamma(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^n)$, $n \gg 0$, le dernier espace étant de dimension finie.*

Démonstration: D'après Proposition 2.2, $j_*\mathcal{S}$ est cohérent, donc $j_*\mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^n$ est engendré par $\Gamma(X, j_*\mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^n) = \Gamma(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^n)$, $n \gg 0$, parce que \mathcal{L} est ample, l'espace à droite étant de dimension finie.

b) Conditions d'annulation

On aura aussi besoin des conditions d'annulation qui sont essentiellement dues à Grothendieck:

2.7 Proposition. *Soit \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur X . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- a) $\text{prof } \mathcal{S}_y \geq n$ pour tout $y \in Y$,
 - b) $\dim Y \cap S_{l+n}(\mathcal{S}) \leq l$ pour tout l ,
 - c) $\mathcal{H}_Y^i \mathcal{S} = 0$ pour $i < n$.
- Dans ce cas, $H_Y^i(X, \mathcal{S}) = 0$ pour $i < n$.

Remarque: Il suffit encore de supposer que X est localement un schéma de type fini sur k .

Démonstration: a) \Leftrightarrow c): voir [G2] III Prop. 3.3.

a) \Rightarrow b): Soit $y \in Y$ tel que les points fermés de $\overline{\{y\}}$ appartiennent à

$S_{l+n}(\mathcal{S})$. Il suffit de démontrer que $s := \dim \overline{\{y\}} \leq l$. Par Lemme 2.1, $\text{prof } \mathcal{S}_y \leq l + n - s$. Donc $\dim \overline{\{y\}} = s \leq l + n - \text{prof } \mathcal{S}_y \leq l + n - n = l$.

b) \Rightarrow a): Supposons $y \in Y$, $\text{prof } \mathcal{S}_y < n$: Soit $s := \dim \overline{\{y\}}$. Par Lemme 2.1, les points fermés de $\overline{\{y\}}$ appartiennent à $S_{n+s-1}(\mathcal{S}) \cap Y$. Donc $\dim S_{n+s-1}(\mathcal{S}) \cap Y \geq \dim \overline{\{y\}} = s$, en contradiction avec l'hypothèse.

La conséquence est obtenue par une suite spectrale, voir [G2] I Th. 2.6.

La condition b) est due à Scheja [Sch] dans le cas analogue analytique.

2.8 Lemme. *Soit $j : X \setminus Y \rightarrow X$ l'inclusion, \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur $X \setminus Y$, et supposons que \mathcal{S} satisfait à (F_1) . Alors $j_*\mathcal{S}$ est cohérent, et $\text{prof } (j_*\mathcal{S})_y \geq 2$ pour $y \in Y$.*

Démonstration: D'après Proposition 2.2 $\mathcal{T} := j_*\mathcal{S}$ est cohérent. On a $\mathcal{T} \simeq j_*j^*\mathcal{T}$, donc $\mathcal{H}_Y^k(\mathcal{T}) = 0, k = 0, 1$, ce qui implique $\text{prof } \mathcal{T}_y \geq 2, y \in Y$, par Proposition 2.7.

3 Conséquences pour les faisceaux formels

a) Complétion de faisceaux

Soit k un corps, X un schéma projectif sur k , Y un sous-espace algébrique fermé, H un hyperplan et \mathcal{I} le faisceau d'idéaux qui correspond à H . Pour un faisceau algébrique \mathcal{S} soit $\hat{\mathcal{S}}$ la complétion de \mathcal{S} le long de $X \cap H$, voir [G3] I.10. On peut déduire du Théorème 1.2, voir [G2] XII Théorème 2.1 pour $Y = \emptyset$:

3.1 Théorème. *Soit \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur $X \setminus Y$. Supposons que la flèche naturelle $\mathcal{S} \otimes \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}\mathcal{S}$ est injective, $\text{prof } \mathcal{S} \geq m$ et que \mathcal{S} vérifie la condition F_m , c.-à.d. $\dim Y \cap \overline{S_l(\mathcal{S})} < l - m$ pour tout $l \leq m + \dim Y$. Alors $H^s(X \cap H \setminus Y, \hat{\mathcal{S}}) \xrightarrow[\leftarrow n]{\simeq} \lim_{\leftarrow n} H^s(X_n \setminus Y_n, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S})$ pour $s \leq m - 1$, et $H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}) \longrightarrow H^s(X \cap H \setminus Y, \hat{\mathcal{S}})$ est bijectif, $s < m - 1$, et injectif, $s = m - 1$.*

Démonstration: On a la suite exacte longue de cohomologie associée à

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^\nu \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}/\mathcal{I}^\nu \mathcal{S} \longrightarrow 0$$

D'après Théorème 1.2, $H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}) \longrightarrow H^s(X \cap H \setminus Y, \mathcal{S}/\mathcal{I}^\nu \mathcal{S})$ est bijectif, $s < m - 1$, et injectif, $s = m - 1, \nu \gg 0$. Pour $s \leq m - 1$, ceci implique $H^s(X \cap H \setminus Y, \hat{\mathcal{S}}) \simeq \varprojlim_{\leftarrow \nu} H^s(X \cap H \setminus Y, \mathcal{S}/\mathcal{I}^\nu \mathcal{S})$, par [G4] 0_{III} 13.3.1, voir

aussi 0_{III} 13.1.2. Ceci donne la bijectivité pour $s < m - 1$; pour $s = m - 1$, la composition des flèches

$$H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}) \longrightarrow H^s(X \cap H \setminus Y, \hat{\mathcal{S}}) \longrightarrow H^s(X \cap H \setminus Y, \mathcal{S}/\mathcal{I}^\nu \mathcal{S})$$

est injective, $\nu \gg 0$, donc la première flèche aussi.

b) Cohomologie des faisceaux formels

Maintenant commençons par un faisceau cohérent \mathcal{S} sur $\hat{X} \setminus \hat{Y}$. Soit $X \subset \mathbb{P}_r$, H un hyperplan, \mathcal{I} le faisceau d'idéaux correspondant. On peut supposer que H est défini par $Z_0 = 0$. Supposons que la flèche naturelle $\mathcal{S} \otimes \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{IS}$ est injective. Soit \mathcal{L} un faisceau ample sur X .

3.2 Lemme. *Soit $\dim \overline{S_l(\mathcal{S}/\mathcal{IS})} \cap Y < l - m$ pour tout $l \leq m + \dim Y \cap H$, $\text{prof } \mathcal{S}/\mathcal{IS} \geq m$. Alors le système $(\oplus_{n \in \mathbb{Z}} H^s(X \cap H \setminus Y, (\mathcal{S}/\mathcal{I}^k \mathcal{S})(n)))_k$ vérifie pour $s < m - 1$ la condition de Mittag-Leffler, voir [G4] 0_{III} 13.1.2.*

Démonstration: Soit $\mathcal{S}_k := \mathcal{S}/\mathcal{I}^k \mathcal{S}$ et $s < m$. Alors $\oplus_{n \in \mathbb{Z}} H^s(X \cap H \setminus Y, \text{gr} \mathcal{S}(n)) \simeq (\oplus_{n \in \mathbb{Z}} H^s(X \cap H \setminus Y, \mathcal{S}_0(n))) \otimes_{k[Z_1, \dots, Z_r]} k[Z_0, \dots, Z_r]$. D'après Lemme 2.5, $\oplus_{n \in \mathbb{Z}} H^s(X \cap H \setminus Y, \mathcal{S}_0(n))$ est de type fini sur $k[Z_1, \dots, Z_r]$. Le module à gauche est donc fini sur $k[Z_0, \dots, Z_r]$. On déduit le résultat en question en utilisant [G4] 0_{III} 13.7.7, corrigé comme dans [G5] Err_{III} 24, p. 89; voir [G2] IX Théorème 2.1, XII Lemme 3.3.

3.3 Lemme. *Sous l'hypothèse du lemme précédant on a pour tout $k < m$: $\dim H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}) = \dim H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S}) < \infty, n \gg 0$ (donc $\dim H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^n) < \infty, n$ arbitraire).*

Démonstration: D'abord $\dim H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S}) < \infty, k < m$, par Proposition 2.2. De plus: $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{I}^n \mathcal{S}/\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{S}) \simeq H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, (\mathcal{S}/\mathcal{IS})(-n)) = 0, k < m, n \gg 0$, par Théorème 1.2, donc $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{S}) \rightarrow H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S})$ est injectif et $\lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S}) \rightarrow H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S})$ aussi pour $k < m, n \gg 0$. La condition de Mittag-Leffler est donc vérifiée pour $(H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S}))_{n \geq 0}$, et $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}) \simeq H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S}) \simeq H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S}), n \gg 0$.

3.4 Lemme. *Supposons que $\dim \overline{S_l(\mathcal{S}/\mathcal{IS})} \cap Y < l - 2$ pour tout $l \leq \dim Y \cap H + 2$ et que $\text{prof } \mathcal{S}/\mathcal{IS} \geq 2$. Alors $\Gamma(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^k) \otimes_{\Gamma(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{O}_{\hat{X}})} \mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}} \rightarrow \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^k$ est surjectif, $k \gg 0$.*

Démonstration: Il suffit de traiter le cas $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$. On s'aperçoit que l'hypothèse de Lemme 3.2 est donnée avec $m = 2$. Soit $G_k := \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X \cap H \setminus Y, (\mathcal{S}/\mathcal{I}^k \mathcal{S})(n))$. D'après Lemme 3.2, il y a un k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ on a $\text{Im}(G_k \rightarrow G_1) = \text{Im}(G_{k_0} \rightarrow G_1)$, donc les deux côtés coïncident avec $\text{Im}(\lim_{\substack{\leftarrow \\ k}} G_k \rightarrow G_1) = \text{Im} \oplus_{n \in \mathbb{Z}} (\Gamma(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}(n)) \rightarrow \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X \cap H \setminus Y, (\mathcal{S}/\mathcal{IS})(n)))$. (*)

Soit $n \gg 0$. D'après Lemme 2.6, $(\mathcal{S}/\mathcal{I}^{k_0} \mathcal{S})(n)$ est engendré par $\Gamma(X \cap H \setminus Y, (\mathcal{S}/\mathcal{I}^{k_0} \mathcal{S})(n))$. Alors $(\mathcal{S}/\mathcal{IS})(n)$ est engendré par l'image de $\Gamma(X \cap H \setminus Y, (\mathcal{S}/\mathcal{I}^{k_0} \mathcal{S})(n))$ dans $\Gamma(X \cap H \setminus Y, (\mathcal{S}/\mathcal{IS})(n))$, donc par celle de $\Gamma(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}(n))$ dans $\Gamma(X \cap H \setminus Y, (\mathcal{S}/\mathcal{IS})(n))$, voir (*). Par conséquent, le module $(\mathcal{S}/\mathcal{IS})(n)$ est engendré par $\Gamma(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}(n))$, donc $\mathcal{S}(n)$ aussi par le lemme de Nakayama.

On a un analogue de Théorème 1.2 pour les faisceaux formels:

3.5 Proposition. *Supposons que $\text{prof } \mathcal{S}/\mathcal{IS} \geq m$, $\dim \overline{S_l(\mathcal{S}/\mathcal{IS})} \cap Y < l - m$ pour $l \leq m + \dim Y \cap H$. Alors*

- a) $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour $k < m, n \ll 0$,
b) $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}) \simeq H^k(X_n \setminus Y_n, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S})$ pour $k < m, n \gg 0$.

Démonstration: Soit $k < m$.

a) On peut supposer $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$. On a $\text{prof } \mathcal{S}/\mathcal{I} \mathcal{S} \geq m$ et que $\mathcal{S}/\mathcal{I} \mathcal{S}$ satisfait F_m . Soit $n \gg 0$. Par Théorème 1.2 nous savons que $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{I}^n \mathcal{S}/\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{S}) = 0$. Ceci implique que $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{I}^n \mathcal{S}/\mathcal{I}^{n+\nu} \mathcal{S}) = 0$ pour $\nu \geq 0$. Le système $(H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{I}^n \mathcal{S}/\mathcal{I}^{n+\nu} \mathcal{S}))$ vérifie la condition de Mittag-Leffler, et $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{I}^n \mathcal{S}) = 0$.

b) Grâce à la démonstration de Lemme 3.3, le système $(H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S}))$ vérifie la condition de Mittag-Leffler, et $\mathcal{S} \simeq \varprojlim_n \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S}$, donc $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}) \simeq \varprojlim_n H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S})$.

D'autre part, la flèche $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{S}) \rightarrow H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S})$ est injective, $n \gg 0$, comme on a vu ci-dessus. Pour $n \gg 0$, on conclut que $H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{S}) \simeq H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S})$, d'où le résultat cherché.

Notons que l'hypothèse de Proposition 3.5 est vérifiée si $\mathcal{S} = \hat{\mathcal{G}}$ et \mathcal{G} vérifie l'hypothèse de Théorème 3.1 avec $m+1$ au lieu de m .

c) Extension de faisceaux formels

On a donc la généralisation suivante de [G2] XII Théorème 3.1 ($Y = \emptyset$):

3.6 Théorème. *Sous l'hypothèse de Lemme 3.4, il y a un faisceau cohérent \mathcal{G} sur X tel que $\hat{\mathcal{G}}|_{\hat{X} \setminus \hat{Y}} \simeq \mathcal{S}$.*

Démonstration: Nous pouvons supposer que $Y \subset \overline{\text{supp } \mathcal{S}}$ et $X = \mathbb{P}_r(k)$, alors $r \geq 2$ à cause de l'hypothèse sur la profondeur. La remarque après Proposition 2.1 montre que $\text{codim}_X Y \geq 4$. Soit $n \gg 0$, alors $\mathcal{S}(n)$ est engendré par $\Gamma(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}(n))$ par Lemme 3.4, et le dernier espace est de dimension finie d'après Lemme 3.3. On a donc un épimorphisme $\mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^d \rightarrow \mathcal{S}(n)$, donc $\mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^d(-n) \rightarrow \mathcal{S}$. Soit \mathcal{K} le noyau qui a les mêmes propriétés que \mathcal{S} . On a donc un épimorphisme $\mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^c \rightarrow \mathcal{K}(l)$, donc $\mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^c(-l) \rightarrow \mathcal{K}$. La suite $\mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^c(-l) \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^d(-n) \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow 0$ est donc exacte. L'homomorphisme $\mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^c(-l) \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^d(-n)$ correspond à un élément de $\Gamma(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \text{Hom}(\mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^c(-l), \mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^d(-n))) \simeq \Gamma(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \hat{\mathcal{T}})$ avec $\mathcal{T} := \text{Hom}(\mathcal{O}_{X \setminus Y}^c(-l), \mathcal{O}_{X \setminus Y}^d(-n))$. Par Théorème 3.1, on obtient un élément correspondant de $\Gamma(X \setminus Y, \mathcal{T})$. Ceci signifie que l'homomorphisme provient d'un homomorphisme $\mathcal{O}_{X \setminus Y}^c(-l) \rightarrow \mathcal{O}_{X \setminus Y}^d(-n)$. Posons $\mathcal{G}_1 := \text{coker}(\mathcal{O}_{X \setminus Y}^c(-l) \rightarrow \mathcal{O}_{X \setminus Y}^d(-n))$ et \mathcal{G} une extension cohérente de \mathcal{G}_1 à X . Alors $\hat{\mathcal{G}}|_{\hat{X} \setminus \hat{Y}} \simeq \mathcal{S}$.

3.7 Corollaire. *Sous l'hypothèse de Lemme 3.4 on peut étendre \mathcal{S} à un faisceau cohérent sur \hat{X} .*

On peut essayer de démontrer Théorème 3.6 comme suit: étendre d'abord à \hat{X} et après à X . En fait, l'extension à \hat{X} est possible, mais la deuxième étape est problématique, voir Appendice.

4 Conséquences pour les fibrés vectoriels algébriques

Soit d'abord X un schéma de type fini sur k , Y un sous-espace fermé.

4.1 Théorème. *Soient Y un sous-espace fermé de X , $\dim Y \cap S_{l+2}(\mathcal{O}_X) \leq l$ pour tout l . Alors $\text{Vect } X \rightarrow \text{Vect}(X \setminus Y)$ est injectif.*

Démonstration: Soient \mathcal{E} et \mathcal{E}' des faisceaux cohérents localement libres sur X tels que $\mathcal{E}|_{X \setminus Y} \simeq \mathcal{E}'|_{X \setminus Y}$. On raisonne comme dans la démonstration de Cor. 2.4 dans [G2] XII: Soit $\mathcal{G} := \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$. L'isomorphisme donne une section de $\mathcal{G}|_{X \setminus Y}$ qui vient d'une section de \mathcal{G} : l'hypothèse garantit que la restriction $\Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(X \setminus Y, \mathcal{G})$ est un isomorphisme, voir Proposition 2.7: on a $H_Y^k(X, \mathcal{G}) = 0, k = 0, 1$. La section de \mathcal{G} définit un homomorphisme $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, on vérifie qu'il s'agit d'un isomorphisme: on prolonge l'isomorphisme inverse et conclut par unicité qu'il s'agit de l'homomorphisme inverse à l'extension déjà trouvée.

Soit maintenant $X \subset \mathbb{P}_m(k)$ un schéma projectif sur k , Y un sous-espace algébrique fermé, H un hyperplan tel que $\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{I}\mathcal{O}_X$, \mathcal{I} étant le faisceau d'idéaux qui correspond à H . Soit \hat{X} la complétion de X le long de $X \cap H$.

4.2 Théorème. *Supposons $\text{prof } \mathcal{O}_{X \setminus Y} \geq 2$ et que $\mathcal{O}_{X \setminus Y}$ vérifie la condition (F_2) . Alors:*

a) *Si \mathcal{E} est un faisceau cohérent localement libre sur $X \setminus Y$, on a des isomorphismes $\Gamma(X \setminus Y, \mathcal{E}) \simeq \Gamma(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \hat{\mathcal{E}}) \simeq \varprojlim_n \Gamma(X_n \setminus Y_n, \mathcal{E}/\mathcal{I}^n \mathcal{E})$.*

b) *$\text{Vect}(X \setminus Y) \rightarrow \varprojlim_n \text{Vect}(X_n \setminus Y_n)$ est injectif, donc $\text{Vect}(X \setminus Y) \rightarrow \text{Vect}(\hat{X} \setminus \hat{Y})$ aussi.*

Démonstration: a) Ceci découle de Théorème 3.1.

b) On raisonne comme dans la démonstration de Théorème 4.1. Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 des faisceaux cohérents localement libres sur $X \setminus Y$ tel que $\mathcal{F}_1|_{X_n \setminus Y_n} \simeq \mathcal{F}_2|_{X_n \setminus Y_n}$ pour tout n . Soit $\mathcal{G} := \text{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Par Théorème 1.2 il y a un n tel que $H^0(X \setminus Y, \mathcal{G}) \simeq H^0(X_n \setminus Y_n, \mathcal{G}|_{X_n \setminus Y_n})$. L'isomorphisme $\mathcal{F}_1|_{X_n \setminus Y_n} \simeq \mathcal{F}_2|_{X_n \setminus Y_n}$ donne une section de $\mathcal{G}|_{X_n \setminus Y_n}$ qui vient d'une section de \mathcal{G} . Celle-ci définit un homomorphisme $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$, on vérifie qu'il s'agit d'un isomorphisme, comme dans la démonstration de Théorème 4.1.

Rappelons les conditions Lef et Leff de Lefschetz introduites dans SGA2 ([G2] X 2, p. 112):

Soit X un schéma de type fini sur k , Z une partie fermée de X . Pour un faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} sur X soit $\hat{\mathcal{F}}$ sa complétion le long de Z . Soit \hat{X} la complétion de X le long de Z .

Définition: On a $\text{Lef}(X, Z)$ si pour tout ouvert U dans X tel que $Z \subset U$ et pour tout faisceau algébrique cohérent localement libre \mathcal{E} sur U on a $H^0(U, \mathcal{E}) \simeq H^0(\hat{X}, \hat{\mathcal{E}})$.

On a $\text{Leff}(X, Z)$ si l'on a $\text{Lef}(X, Z)$ et pour tout faisceau algébrique cohérent

localement libre \mathcal{E}' sur \hat{X} il y a un voisinage ouvert U de Z dans X et un faisceau cohérent localement libre \mathcal{E} sur U tels que $\hat{\mathcal{E}} \simeq \mathcal{E}'$.

Retournons au contexte habituel.

4.3 Corollaire. *Supposons $\text{prof } \mathcal{O}_{X \setminus Y} \geq 2$, $\dim \overline{S_l(\mathcal{O}_{X \setminus Y})} \cap Y \cap H < l - 3$ pour tout $l \leq \dim Y \cap H + 3$.*

a) *On a $\text{Lef}(X \setminus Y, X \cap H \setminus Y)$.*

b) *Pour tout voisinage ouvert U de $X \cap H \setminus Y$ dans $X \setminus Y$, la flèche $\text{Vect } U \rightarrow \text{Vect } \hat{X} \setminus \hat{Y}$ est injective.*

Démonstration: a) Soit U un voisinage ouvert de $X \cap H \setminus Y$ dans $X \setminus Y$. Posons $Y' := X \setminus U$. On s'aperçoit que les hypothèses de Théorème 3.1 sont remplies avec $m = 2$ et Y' , \mathcal{O}_U au lieu de Y et \mathcal{S} : on a $Y' \cap H = Y \cap H$. Notons que $S_l(\mathcal{O}_{X \setminus Y'}) \subset S_l(\mathcal{O}_{X \setminus Y})$, donc $\dim \overline{S_l(\mathcal{O}_{X \setminus Y'})} \cap Y' \leq \dim \overline{S_l(\mathcal{O}_{X \setminus Y})} \cap Y \cap H + 1 < l - 2$, et $\text{prof } \mathcal{O}_{X \setminus Y'} \geq 2$.

b) par Théorème 4.2, avec $Y' := X \setminus U$ au lieu de Y .

La comparaison de $\text{Vect}(\hat{X} \setminus \hat{Y})$ et $\text{Vect}(X \cap H \setminus Y)$ est plus difficile. Notons qu'il ne s'agit pas des groupes mais des ensembles avec un élément distingué. On peut donc parler du noyau mais il faut être prudent parce que la trivialité du noyau n'implique pas l'injectivité. Le sous-ensemble de $\text{Vect} \dots$ représenté par des fibrés vectoriels de rang r sera dénoté par $\text{Vect}_r \dots$. D'abord:

4.4 Lemme. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H^1(X \cap H \setminus Y, \mathcal{I}^k / \mathcal{I}^{k+1}) = 0$ pour tout $k \geq n \geq 1$. Alors le noyau de $\lim_{\leftarrow m} \text{Vect}(X_m \setminus Y_m) \rightarrow \text{Vect}(X_n \setminus Y_n)$ est trivial.*

Démonstration: Soit $r \in \mathbb{N}$. De façon analogue à [G2] XI (1.1), on a une suite exacte:

$$0 \rightarrow (\mathcal{I}^k / \mathcal{I}^{k+1})^{\oplus r^2} \rightarrow GL_r(\mathcal{O}_{X_{k+1}}) \rightarrow GL_r(\mathcal{O}_{X_k}) \rightarrow 1$$

On passe à la suite exacte de cohomologie, cf. [Fr], qui se termine ici par $H^1(X \cap H \setminus Y, GL_r(\mathcal{O}_{X_k}))$, et déduit que le noyau de $\text{Vect}_r(X_{k+1} \setminus Y_{k+1}) \rightarrow \text{Vect}_r(X_k \setminus Y_k)$ est trivial, $k \geq n$, donc celui de $\lim_{\leftarrow m} \text{Vect}_r(X_m \setminus Y_m) \rightarrow \text{Vect}_r(X_n \setminus Y_n)$ aussi.

En particulier, on obtient en utilisant Théorème 1.2, parce que $\mathcal{I}^k / \mathcal{I}^{k+1} \simeq (\mathcal{I} / \mathcal{I}^2)^k$:

4.5 Proposition. *Supposons que $\text{prof } \mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y} \geq 1$ et que $\mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y}$ vérifie la condition (F_1) . Pour $n \gg 0$, le noyau de $\lim_{\leftarrow m} \text{Vect}(X_m \setminus Y_m) \rightarrow \text{Vect}(X_n \setminus Y_n)$ est trivial.*

Sous des hypothèses plus fortes on peut appliquer Lemme 4.4 avec $n = 1$:

4.6 Théorème. *Soit $\text{codim}_X Y \cap H \geq 4$ et $X \setminus Y$ une intersection complète dans $\mathbb{P}_N(k) \setminus Y$ de dimension ≥ 3 . Alors le noyau de $\lim_{\leftarrow m} \text{Vect}(X_m \setminus Y_m) \rightarrow \text{Vect}(X \cap H \setminus Y)$ est trivial.*

Démonstration: Soit $n \geq 1$. Il suffit de démontrer que le noyau de $Vect(X_{n+1} \setminus Y_{n+1}) \rightarrow Vect(X_n \setminus Y_n)$ est trivial, où bien $H^1(X \setminus Y, \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1}) = 0$. Soit $i : X \rightarrow \mathbb{P}_N$ l'inclusion. Il y a une résolution de $(i_*(\mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1}))|_{\mathbb{P}_N \setminus Y \cap H}$ par des faisceaux qui sont sommes directes de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N \setminus Y \cap H}(l)$ avec $l < 0$, le nombre des faisceaux non-triviaux étant $\leq k + 2$, où $k := N - \dim X$. Il suffit donc de vérifier que $H^j(\mathbb{P}_N \setminus Y \cap H, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) = 0$, $j \leq k + 2$, ce qui provient du fait que $\mathcal{H}_{Y \cap H}^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}) = 0$, donc $H_{Y \cap H}^j(\mathbb{P}_N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) = 0$, $j \leq k + 3$, voir Proposition 2.7, et $H^j(\mathbb{P}_N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) = 0$, $l < 0, j \leq k + 2$.

Démonstration de Théorème 1.4: découle de Théorème 4.2 et 4.6.

4.7 Théorème. *Supposons que $\text{prof } \mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y} \geq 1$ et que $\mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y}$ vérifie la condition (F_1) . Alors $Vect(\hat{X} \setminus \hat{Y}) \simeq \varprojlim_m Vect(X_m \setminus Y_m)$.*

Démonstration: D'abord, on a la surjectivité par [G3] I 10.10.8.6:

Soit (\mathcal{E}_n) un représentant d'un élément de $\varprojlim Vect(X_n \setminus Y_n)$, c.-à d. \mathcal{E}_n est cohérent et localement libre sur $X_n \setminus Y_n$, $\mathcal{E}_{n+1}|_{(X_n \setminus Y_n)} \simeq \mathcal{E}_n$ pour tout n . Alors il y a un faisceau \mathcal{E} sur $\hat{X} \setminus \hat{Y}$ qui est cohérent et localement libre tel que $\mathcal{E}|_{X_n \setminus Y_n} \simeq \mathcal{E}_n$ pour tout n .

Pour l'injectivité, supposons que \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont localement libres de type fini sur $\hat{X} \setminus \hat{Y}$ tels que $\mathcal{E}|_{X_n \setminus Y_n} \simeq \mathcal{E}'|_{X_n \setminus Y_n}$ pour tout n . Le problème est que les isomorphismes a priori ne doivent pas être compatibles.

Posons $\mathcal{S} := Hom(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$. Ce faisceau est cohérent et localement libre. Choisissons n suffisamment grand tel qu'on a d'abord $H^0(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}) \simeq H^0(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S})$, par Proposition 3.5. On y pose $m = 1$, $\mathcal{S} := \mathcal{O}_{\hat{X}}$.

On veut d'abord montrer que l'isomorphisme $\mathcal{E}|_{X_n \setminus Y_n} \rightarrow \mathcal{E}'|_{X_n \setminus Y_n}$ s'étend à un morphisme $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$: Le premier définit un élément de $H^0(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S})$, et ce groupe est isomorphe à $H^0(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S})$ par le choix de n .

Comme dans la démonstration de Théorème 4.1 on montre qu'il s'agit d'un isomorphisme: on utilise $Hom(\mathcal{E}', \mathcal{E})$, $Hom(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ et $Hom(\mathcal{E}', \mathcal{E}')$ au lieu de $\mathcal{S} := Hom(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$.

Démonstration de Théorème 1.3: L'isomorphisme à droite est assuré par le théorème précédant.

Il reste à démontrer la bijectivité de la flèche à gauche.

L'injectivité découle de Corollaire 4.3.

Surjectivité: Soit \mathcal{E} cohérent localement libre sur $\hat{X} \setminus \hat{Y}$, alors il y a un faisceau cohérent \mathcal{F} sur $X \setminus Y$ tel que $\hat{\mathcal{F}} \simeq \mathcal{E}$, par Théorème 3.6. Comme $\hat{\mathcal{F}}$ est localement libre on conclut que \mathcal{F} est localement libre sur un voisinage U , par [G3] I 10.8.15. Alors $\mathcal{F}|_U$ représente l'image inverse cherchée. Voir [G2] XII Corollaire 3.4b dans le cas $Y = \emptyset$.

En fait on vient de montrer la condition $Leff(X \setminus Y, X \cap H \setminus Y)$.

Remarque: L'énoncé ne dépend pas de Y tout entier mais de $Y \cap H$. On peut donc choisir Y de façon convenable.

5 Conséquences pour le groupe de Picard

Pour le groupe de Picard il y a des résultats en plus:

5.1 Théorème. *Supposons que $\text{prof } \mathcal{O}_{X \setminus Y} \geq 2$, $\text{prof } \mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y} \geq 2$, $\mathcal{O}_{X \setminus Y}$ et $\mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y}$ satisfont à la condition F_2 et que $\mathcal{O}_{X,x}$ est parafactoriel (voir [G2] XI Déf. 3.2) au points x de $X \setminus Y$ tels que $\dim \overline{\{x\}} \leq \dim Y \cap H + 1$. Alors $\text{Pic } X \setminus Y \simeq \varprojlim \text{Pic}(X_n \setminus Y_n)$.*

Démonstration: À cause de Théorème 4.2b) l'application $\text{Pic } X \setminus Y \longrightarrow \varprojlim \text{Pic } X_n \setminus Y_n$ est injective.

Comme dans la démonstration de Théorème 1.3, on montre qu'un élément de $\varprojlim \text{Pic } X_n \setminus Y_n$ provient d'un élément de $\text{Pic } U$, U étant un voisinage ouvert de $X \cap H \setminus Y$ dans $X \setminus Y$ convenable. Il suffit de montrer que $\text{Pic } X \setminus Y \longrightarrow \text{Pic } U$ est surjectif. Mais pour $Y' := X \setminus U$ nous savons que $\dim Y' \leq \dim Y \cap H + 1$, donc $\mathcal{O}_{X,x}$ est parafactoriel pour tout $x \in Y' \setminus Y$. Ceci implique que $(X \setminus Y, U)$ est parafactoriel, voir [G2] XI Prop. 3.3.

5.2 Théorème. *Soit $X \subset \mathbb{P}_m(k)$ un schéma projectif sur k , Y un sous-espace algébrique fermé, H un hyperplan tel que la flèche naturelle $\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{I} \mathcal{O}_X$ soit injective. Soit X_n le sous-espace de X défini par \mathcal{I}^n , \mathcal{I} étant le faisceau d'idéaux qui définit $X \cap H$ dans X . Supposons que $\text{prof } \mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y} \geq 3$ et que $\mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y}$ satisfait F_3 . Alors pour $n \gg 0$, on a $\text{Pic}(\hat{X} \setminus \hat{Y}) \simeq \text{Pic}(X_n \setminus Y_n)$.*

Démonstration: D'après [G2] XI (1.1) on a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{n+1}}^* \longrightarrow \mathcal{O}_{X_n}^* \longrightarrow 1$$

On vérifie que $H^k(X \cap H \setminus Y, \mathcal{I}^{n+1}/\mathcal{I}^{n+2}) = 0, k = 1, 2$, donc $\text{Pic}(X_{n+1} \setminus Y_{n+1}) \simeq \text{Pic}(X_n \setminus Y_n), n \gg 0$, à cause de Théorème 1.2, donc $\varprojlim \text{Pic}(X_n \setminus Y_n) \simeq \text{Pic}(X_n \setminus Y_n), n \gg 0$.

Démonstration de Théorème 1.5: On procède par récurrence sur la codimension de X : Le cas $X = \mathbb{P}_N(k)$ est clair parce que dans ce cas $\text{Pic } X = \text{Cl } X \simeq \text{Cl } X \setminus Y = \text{Pic } X \setminus Y$: X est lisse et Y est de codimension ≥ 2 , voir [G2] XI Cor. 3.8. Nous pouvons donc supposer que X n'est pas un espace projectif. Soit $X = X' \cap H$, H étant une hypersurface et $\dim X' = \dim X + 1$. Alors $X' \setminus Y$ est une intersection complète dans $\mathbb{P}_N(k) \setminus Y$. On sait par [G2] XI Théorème 3.13 que $\mathcal{O}_{X',x}$ est parafactoriel pour tout $x \in X' \setminus Y$ avec $\dim \overline{\{x\}} \leq \dim Y + 1$ parce que (X', x) est une intersection complète de dimension ≥ 4 : la codimension de Y dans X' est au moins 5. Par l'hypothèse de récurrence nous savons que $\text{Pic } X' \setminus Y \simeq \mathbb{Z}$. Par Théorème 5.1 (où on peut remplacer "hyperplan" par "hypersurface") on obtient que $\mathbb{Z} \simeq \text{Pic } X' \setminus Y \simeq \varprojlim \text{Pic } X'_n \setminus Y_n$. La démonstration du théorème précédant montre qu'il suffit de vérifier que $H^j(X \setminus Y, \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}) = 0, n \geq 1, j = 1, 2$, \mathcal{I} étant le faisceau d'idéaux de X dans X' . Mais il y a une résolution de $(i_*(\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}))|_{\mathbb{P}_N \setminus Y}$, où $i : X \rightarrow \mathbb{P}_N$ est l'inclusion, par des faisceaux qui sont sommes directes

de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N \setminus Y}(l)$ avec $l < 0$, le nombre des faisceaux étant $\leq k + 2$ avec $k := N - \dim X$. Il suffit donc de vérifier que $H^j(\mathbb{P}_N \setminus Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) = 0$, $j \leq k + 2$, ce qui provient du fait que $\mathcal{H}_Y^j(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}) = 0$, donc $H_Y^j(\mathbb{P}_N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) = 0$, $j \leq k + 3$, et $H^j(\mathbb{P}_N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) = 0$, $l < 0, j \leq k + 2$.

6 Cas analytique

Considérons le cas $k = \mathbb{C}$. Notons que la notion de profondeur ne change pas dans le cadre analytique.

a) Faisceaux cohérents sur X

On a un analogue de Proposition 2.1 dans le cas où il y a une extension cohérente - ce qui n'est pas automatique dans le cas analytique, contraire au cas algébrique.

6.1 Proposition. *Soit X un espace analytique complexe, Y un sous-espace analytique fermé, \mathcal{S} un faisceau analytique cohérent sur X (!). Supposons que X est compact, $\dim Y \cap \overline{S_{l+m}(\mathcal{S}|X \setminus Y)} < l$ pour tout $l \leq \dim Y$. Alors $\dim H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}) < \infty$, $s < m$.*

Démonstration: Par [T2] III Th. 2.1, [Si2] où [BS] II Th. 4.1 on sait que $R^s j_*(\mathcal{S}|X \setminus Y)$ est cohérent, $s < m$, où $j : X \setminus Y \rightarrow X$. On conclut par la suite spectrale $E_2^{pq} = H^p(X, R^q j_* \mathcal{S}) \Rightarrow H^{p+q}(X \setminus Y, \mathcal{S})$.

6.2 Proposition. *Soit X une variété algébrique complexe complète, Y une sous-variété fermée, \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur $X \setminus Y$. Supposons que $\dim Y \cap \overline{S_{l+m}(\mathcal{S})} < l$ pour tout $l \leq \dim Y$. Alors $(R^s j_* \mathcal{S})^{an} \simeq R^s j_*^{an} \mathcal{S}^{an}$, donc $H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}) \simeq H^s(X^{an} \setminus Y^{an}, \mathcal{S}^{an})$, $s < m$.*

Démonstration: Pour le premier énoncé voir [Si2]. Pour le deuxième on conclut par GAGA, en comparant la suite spectrale dans la démonstration précédente avec l'analogue algébrique. Voir Lemme 10.8.

6.3 Théorème. *Soit X un sous-espace analytique fermé d'un espace projectif complexe, Y un sous-espace analytique fermé, \mathcal{S} un faisceau analytique cohérent sur X , \mathcal{L} un faisceau ample sur X , $\text{prof } \mathcal{S}|X \setminus Y \geq m$, $\dim Y \cap \overline{S_{l+m}(\mathcal{S}|X \setminus Y)} < l$ pour $l \leq \dim Y$. Alors $H^s(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-\nu}) = 0$, $s < m$, $\nu \gg 0$.*

Démonstration: Par Proposition 6.2 on peut passer au cadre algébrique et appliquer Théorème 1.2. Notons que \mathcal{S} provient d'un faisceau algébrique cohérent par GAGA.

b) Faisceaux cohérents sur $X \setminus Y$

Qu'est-ce qui se passe quand on ne suppose plus que \mathcal{S} s'étend à X ?

Soit X un espace analytique complexe, Y un sous-espace analytique fermé.

6.4 Lemme. [FG] Soit \mathcal{S} un faisceau analytique cohérent sur $X \setminus Y$, $d \geq 0$, $\dim Y \leq d$, $\dim S_{l+2}(\mathcal{S}) \leq l$ pour tout $l \leq d$. Alors il y a une extension cohérente $\hat{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S} à X , à savoir $j_*\mathcal{S}$, où $j : X \setminus Y \rightarrow X$ est l'inclusion, telle que $\dim S_{l+2}(\hat{\mathcal{S}}) \leq l$ pour $l \leq d$.

On a une variante de Théorème 6.3:

6.5 Théorème. Soit X un sous-espace analytique fermé d'un espace projectif complexe, Y un sous-espace analytique fermé, \mathcal{S} un faisceau analytique cohérent sur $X \setminus Y$, \mathcal{L} un faisceau ample sur X , $\text{prof } \mathcal{S} \geq m$, $\dim S_{l+m}(\mathcal{S}) \leq l$ pour $l \leq \dim Y$. Alors $H^s(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_{X \setminus Y}} \mathcal{L}^{-\nu}|_{X \setminus Y}) = 0$, $s < m$, $\nu \gg 0$.

Démonstration: Il suffit de traiter le cas où $\text{prof } \mathcal{S} \geq m + \dim Y + 1$: On a $\dim S_{m+\dim Y}(\mathcal{S}) \leq \dim Y$. Posons $Y' := Y \cup S_{m+\dim Y}(\mathcal{S})$; alors $\text{prof } \mathcal{S}|_{(X \setminus Y')} \geq m + \dim Y + 1 = m + \dim Y' + 1$, et $H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}) \rightarrow H^s(X \setminus Y', \mathcal{S})$ est injectif, $s < m$, à cause de [BS] II Th. 3.6.

Soit d'abord $m \geq 2$. Par le lemme précédant on peut appliquer Théorème 6.3.

Ou bien on applique [HL2] Théorème 4.2.

Il reste à traiter le cas $m = 1$ où il faut démontrer le lemme suivant:

6.6 Lemme. Soit X un sous-espace analytique fermé d'un espace projectif complexe, Y un sous-espace analytique fermé, \mathcal{S} un faisceau analytique cohérent sur $X \setminus Y$, \mathcal{L} un faisceau ample sur X , $\text{prof } \mathcal{S} \geq n := \max\{1, \dim Y + 2\}$. Soit \mathcal{L} un faisceau ample sur X . Alors $H^0(X \setminus Y, \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_{X \setminus Y}} \mathcal{L}^{-\nu}|_{X \setminus Y}) = 0$, $\nu \gg 0$.

Démonstration: Récurrence sur $\dim Y$. On peut supposer que X est un espace projectif.

Le cas $Y = \emptyset$ est assuré par [BS] IV Cor. 3.3.

Soit donc $Y \neq \emptyset$. On peut supposer $\mathcal{S} \neq 0$ et $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$. Soit $x \in \text{Supp } \mathcal{S}$. Pour presque toute forme linéaire f avec $f(x) = 0$ la multiplication $f \cdot \dots : \mathcal{S}_x \rightarrow \mathcal{S}(1)_x$ est injective:

Soit g une fonction linéaire avec $g(x) \neq 0$. En prenant des générateurs de \mathcal{S}_x on trouve une suite $0 = \mathcal{S}_x^0 \subset \mathcal{S}_x^1 \subset \dots \subset \mathcal{S}_x^r = \mathcal{S}_x$ où $\mathcal{S}_x^j / \mathcal{S}_x^{j-1}$ est engendré par un élément $[s_j] \neq 0$. Supposons que f/g n'est pas contenu dans l'union des $\text{Ann}(\mathcal{S}_x^j / \mathcal{S}_x^{j-1})$, donc $f \cdot [s_j] \neq 0$. On vérifie par récurrence que la multiplication $f \cdot \dots : \mathcal{S}_x^j \rightarrow \mathcal{S}_x^j \otimes \mathcal{O}_X(1)_x$ est injective si f appartient à un certain ouvert de Zariski non-vide. L'injectivité est gardée pour un voisinage de x convenable.

Par un recouvrement dénombrable de $\text{Supp } \mathcal{S}$ on obtient qu'on peut trouver une fonction linéaire f telle que $f \cdot \dots : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}(1)$ est injective. Soit \mathcal{I} l'idéal qui définit $f = 0$; alors $\mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{I}$ et $\mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^{-l} \simeq \mathcal{I}^l \otimes \mathcal{S}$. On déduit que $\mathcal{S} \otimes (\mathcal{I}^l / \mathcal{I}^m) \simeq \mathcal{I}^l \otimes \mathcal{S} / \mathcal{I}^m \otimes \mathcal{S}$, $m \geq l$.

L'hypothèse de récurrence donne que $H^0(X \setminus Y, (\mathcal{I}^l \otimes \mathcal{S}) / (\mathcal{I}^{l+1} \otimes \mathcal{S})) = H^0(X \cap H \setminus Y, \mathcal{S} \otimes (\mathcal{I} / \mathcal{I}^2)^l) = 0$ pour $l \gg 0$ parce que $(\mathcal{I} / \mathcal{I}^2)^{-1}|_H$ est ample sur $X \cap H$. Donc $H^0(X \setminus Y, \mathcal{I}^{l+1} \otimes \mathcal{S}) \rightarrow H^0(X \setminus Y, \mathcal{I}^l \otimes \mathcal{S})$ est bijectif, et $H^0(X \setminus Y, \mathcal{I}^m \otimes \mathcal{S}) \rightarrow H^0(X \setminus Y, \mathcal{I}^l \otimes \mathcal{S})$ aussi, $l \gg 0$, $m > l$.

Supposons que $H^0(X \setminus Y, \mathcal{I}^l \otimes \mathcal{S}) \neq 0, l \gg 0$: Soit s un élément différent de 0. Le support de s n'est pas un ensemble fini: autrement on obtient dans un point x non-isolé du support une contribution non-triviale à $\mathcal{H}_x^0(\mathcal{S}_x)$ en contradiction avec l'hypothèse $\text{prof } \mathcal{S} \geq 1$. Le support de s coupe donc $H : f = 0$.

Soit $x \in X \cap H \setminus Y$ avec $s_x \neq 0$. Alors $s_x \in \bigcap \mathcal{I}_x^m \mathcal{S}_x$. L'idéal \mathcal{I}_x est un idéal propre parce que $x \in H$. \mathcal{I}_x est donc contenu dans un idéal maximal. Le théorème d'intersection de Krull ([KK] 23.A.5) implique que $s_x = 0$, ce qui est une contradiction.

c) Faisceaux formels

Ici prenons les notations de Théorème 1.6.

Pour les faisceaux formels, on peut montrer

6.7 Proposition. *Supposons que \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur \hat{X} , $\mathcal{I} \otimes \mathcal{S}|_{\hat{X} \setminus \hat{Y}} \simeq \mathcal{IS}|_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}$, $\text{prof } \mathcal{S}/\mathcal{IS} \geq m$, \mathcal{S}/\mathcal{IS} satisfait (F_m) . Alors*

$$\begin{array}{ccc} H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \mathcal{S}) & \xrightarrow{\simeq} & H^k(X_n \setminus Y_n, \mathcal{S}/\mathcal{I}^n \mathcal{S}) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^k(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}, \mathcal{S}^{an}) & \xrightarrow{\simeq} & H^k(X_n^{an} \setminus Y_n^{an}, \mathcal{S}^{an}/(\mathcal{I}^{an})^n \mathcal{S}^{an}) \end{array}$$

pour $k < m, n \gg 0$.

Démonstration: L'isomorphisme supérieur est assuré par Proposition 3.5, celui à droite par Proposition 6.2. Par Théorème 6.3 on obtient pour $n \gg 0, k < m$: $H^k(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}, (\mathcal{I}^n \mathcal{S}/\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{S})^{an}) = 0, n \gg 0$, donc $H^k(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}, \mathcal{S}^{an}/(\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{S})^{an}) \longrightarrow H^k(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}, \mathcal{S}^{an}/(\mathcal{I}^n \mathcal{S})^{an})$ est injectif, donc bijectif. Par conséquent, $H^k(X_n^{an} \setminus Y_n^{an}, \mathcal{S}^{an}/(\mathcal{I}^{an})^n \mathcal{S}^{an}) \simeq \varprojlim H^k(X_m^{an} \setminus Y_m^{an}, \mathcal{S}^{an}/(\mathcal{I}^{an})^m \mathcal{S}^{an}) \simeq H^k(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}, \mathcal{S}^{an})$, voir démonstration de Proposition 3.5. La flèche inférieure est donc bijective.

6.8 Proposition. *Soit \mathcal{S} un faisceau algébrique cohérent sur $X \setminus Y$ tel que $\mathcal{I} \otimes \mathcal{S} \simeq \mathcal{IS}$, $\text{prof } \mathcal{S} \geq m$, $\dim Y \cap \overline{S_{l+m}(\mathcal{S})} < l$ pour $l \leq \dim Y$. Alors, pour $k < m - 1$:*

$$\begin{array}{ccc} H^k(X \setminus Y, \mathcal{S}) & \simeq & H^k(\hat{X} \setminus \hat{Y}, \hat{\mathcal{S}}) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^k(X^{an} \setminus Y^{an}, \mathcal{S}^{an}) & \simeq & H^k(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}, \hat{\mathcal{S}}^{an}) \end{array}$$

Démonstration: L'isomorphie à gauche découle de Proposition 6.2, celle d'en haut de Théorème 3.1, celle à droite de Proposition 6.7. L'isomorphie en bas en résulte mais s'obtient aussi comme dans Théorème 3.1, en utilisant Théorème 6.3 au lieu de 1.2; notons que \mathcal{S} admet une extension cohérente à X .

6.9 Proposition. *Soit \mathcal{S} un faisceau analytique cohérent sur $\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}$, $\mathcal{I}^{an} \otimes \mathcal{S} \simeq \mathcal{I}^{an} \mathcal{S}$, $\dim S_{l+2}(\mathcal{S}/\mathcal{I}^{an} \mathcal{S}) \leq l$, $l \leq \dim Y \cap H$. Alors \mathcal{S} provient d'un faisceau algébrique cohérent sur $\hat{X} \setminus \hat{Y}$.*

Démonstration: À cause de Lemme 6.4 il y a pour tout n une extension cohérente de $\mathcal{S}/(\mathcal{I}^{an})^n \mathcal{S}$ à X_n^{an} . Par GAGA la dernière est algébrique, il y a donc un faisceau algébrique \mathcal{T}_n sur $X_n \setminus Y_n$ tel que $\mathcal{T}_n^{an} \simeq \mathcal{S}/(\mathcal{I}^{an})^n \mathcal{S}$. On a donc $(\mathcal{T}_{n+1}/\mathcal{I}^n \mathcal{T}_{n+1})^{an} \simeq \mathcal{T}_{n+1}^{an}/(\mathcal{I}^{an})^n \mathcal{T}_{n+1}^{an} \simeq \mathcal{S}/(\mathcal{I}^{an})^n \mathcal{S} \simeq \mathcal{T}_n^{an}$. Par conséquent, $j_*^{an}(\mathcal{T}_{n+1}/\mathcal{I}^n \mathcal{T}_{n+1})^{an} \simeq j_*^{an} \mathcal{T}_n^{an}$, c.-à d. $(j_*(\mathcal{T}_{n+1}/\mathcal{I}^n \mathcal{T}_{n+1}))^{an} \simeq (j_* \mathcal{T}_n)^{an}$, voir Proposition 6.2. Par GAGA, $j_*(\mathcal{T}_{n+1}/\mathcal{I}^n \mathcal{T}_{n+1}) \simeq j_* \mathcal{T}_n$, d'où $\mathcal{T}_{n+1}/\mathcal{I}^n \mathcal{T}_{n+1} \simeq \mathcal{T}_n$. Soit $\mathcal{T} := \varprojlim \mathcal{T}_n$, alors \mathcal{T} est cohérent par [H1] II Prop. 9.6, et $\mathcal{T}^{an} \simeq \mathcal{S}$.

6.10 Proposition. *Soit \mathcal{S} un faisceau analytique cohérent sur $\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}$, $\mathcal{I}^{an} \otimes \mathcal{S} \simeq \mathcal{I}^{an} \mathcal{S}$, $m \geq 2$, $\dim S_{l+m}(\mathcal{S}/\mathcal{I}^{an} \mathcal{S}) \leq l$ pour $l \leq \dim Y \cap H$. Alors $H^k(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}, \mathcal{S}) \simeq H^k(X_n^{an} \setminus Y_n^{an}, \mathcal{S}/(\mathcal{I}^{an})^n \mathcal{S})$ pour $k < m, n \gg 0$.*

Démonstration: On procède comme dans la démonstration de Proposition 6.8. Au lieu de Théorème 6.3 on applique Théorème 6.5. La finitude de $H^k(X_n^{an} \setminus Y_n^{an}, \mathcal{S}/(\mathcal{I}^{an})^n \mathcal{S})$ provient de Lemme 6.4 et Proposition 6.1.

7 Fibrés vectoriels analytiques

Soit maintenant X un sous-espace analytique fermé de $\mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ et Y un sous-espace analytique fermé de X . Par Chow X et Y sont algébriques, c.-à d. proviennent de schémas complexes. Soit H un hyperplan, $d := \dim Y \cap H$, où $\dim \emptyset := -1$.

a) Sections de faisceaux

7.1 Théorème. *Soit \mathcal{S} un faisceau analytique cohérent sur X tel que $\dim S_{l+2}(\mathcal{S}) \leq l$ pour $l \leq d + 1$. Soit $s \in \Gamma(X \cap H \setminus Y, \mathcal{S})$. Alors s admet une extension unique à une section $\hat{s} \in \Gamma(X, \mathcal{S})$.*

Démonstration: Récurrence sur d . Cas $d = -1$: D'après [Go] II Th. 3.3.1, on peut étendre s à une section dans $\Gamma(U, \mathcal{S})$, U étant un voisinage de $X \cap H$ dans X dont le complémentaire est un fermé de Stein. Or, $\text{prof } \mathcal{S} \geq 2$, donc $\Gamma(X, \mathcal{S}) \simeq \Gamma(U, \mathcal{S})$ parce que $H_{X \setminus U}^j(X, \mathcal{S}) = 0, j \leq 1$, par [BS] I Theorem 3.1.

Passage de $d - 1$ à d : Nous pouvons supposer que $X = \mathbb{P}_N$ et $Y = Y \cap H$ est réduit.

Soit $Y' := \text{Sing } Y$, donc $\dim Y' \leq d - 1$.

Fixons un point de $Y \setminus Y'$. Choisissons des coordonnées locales z_1, \dots, z_N tel que notre point correspond à 0 et qu'on a un voisinage de la forme $U := \{|z_j| < \epsilon, j = 1, \dots, N\}$. Nous pouvons achever que $H \cap U = \{z \in U \mid z_N = 0\}$ et $Y \cap U = \{z \in U \mid z_{d+1} = \dots = z_N = 0\}$.

Soient $(\epsilon_\nu)_{\nu \geq 1}$ et $(\delta_\nu)_{\nu \geq 1}$ deux suites strictement décroissantes avec $\epsilon > \epsilon_\nu \searrow 0$, $\epsilon > \delta_\nu \searrow 0$. Soit $W_\nu := \{z \in U \mid \max(|z_{d+1}|, \dots, |z_{N-1}|) > \epsilon_\nu, |z_N| < \delta_\nu\}$, $W := \bigcup W_\nu$. Les fermetures des W dans $\bar{U} \setminus Y$ forment un système fondamental de voisinages fermés de $\bar{U} \cap H \setminus Y$ dans $\bar{U} \setminus Y$.

Or, $s|_{U \cap H \setminus Y}$ s'étend à une section s' sur un tel W . Nous voulons montrer qu'il y a une extension unique s'' de s' sur $U_1 \setminus Y$, avec $U_1 := U \cap \{|z_N| < \delta_1\}$.

Soit $V_\nu := W \cup \{z \in U \mid \delta_\nu < |z_N| < \delta_1 \text{ ou } \max(|z_{d+1}|, \dots, |z_{N-1}|) > \epsilon_\nu, |z_N| < \delta_1\}$. Montrons par récurrence que s' admet une extension unique à $s_\nu \in \Gamma(V_\nu, \mathcal{S})$.

Passage de ν à $\nu + 1$:

D'après [Si3] Proposition 3.14, p. 141 (en y posant \cup au lieu de \cap ; voir aussi [Si3] Prop. 3.13, p. 140) il y a une extension unique t de $s_\nu|_{U \cap \{\max(|z_{d+1}|, \dots, |z_{N-1}|) > \epsilon_\nu, \delta_{\nu+2} < |z_N| < \delta_1\}}$ à $U \cap \{\delta_{\nu+2} < |z_N| < \delta_1\}$. La restriction de t à $U \cap \{\delta_\nu < |z_N| < \delta_1\}$ doit coïncider avec celle de s_ν . En plus, la restriction de t à $U \cap \{\delta_{\nu+2} < |z_N| < \delta_{\nu+1}\}$ doit coïncider avec l'extension de $s_\nu|_{U \cap \{\delta_{\nu+2} < |z_N| < \delta_{\nu+1}, \max(|z_{d+1}|, \dots, |z_{N-1}|) > \epsilon_{\nu+1}\}}$. En total t est une extension de $s_\nu|_{V_\nu \cap \{|z_N| > \delta_{\nu+2}\}}$. En utilisant t on obtient donc l'extension $s_{\nu+1}$.

Les s_ν conduisent à une extension unique de s' à $U_1 \setminus Y$. D'après [BS] II Theorem 3.6 on obtient une extension unique à U_1 .

Le germe de l'extension en 0 ne dépend que de s : Supposons que l'on a deux extensions. Elles doivent coïncider sur un ensemble W de la forme indiquée en haut. Grâce à l'unicité de l'extension d'une section sur W on obtient l'énoncé d'unicité.

On obtient donc une extension de s à $X \setminus Y'$, donc par récurrence à X .

Le procédé ici est semblable à celui dans le cas local dans [Ha2].

7.2 Corollaire. *Soit \mathcal{S} un faisceau analytique cohérent sur $X \setminus Y$ tel que $\dim S_{l+2}(\mathcal{S}) \leq l$ pour $l \leq d + 1$. Soit $s \in \Gamma(X \cap H \setminus Y, \mathcal{S})$. Alors s admet une extension unique à une section $\hat{s} \in \Gamma(X \setminus Y, \mathcal{S})$.*

Démonstration: D'après Lemme 6.4, $j_*\mathcal{S}$ est cohérent et satisfait à l'hypothèse de Théorème 7.1. On a une extension unique à une section de $j_*\mathcal{S}$, il y a donc une extension à une section de \mathcal{S} qui est unique aussi à cause de [BS] II Theorem 3.6.

b) Extension de faisceaux

7.3 Théorème. *Soit \mathcal{S} un $(\mathcal{O}_{X \setminus Y}|_{X \cap H \setminus Y})$ -module cohérent, $d := \dim Y \cap H$, $\dim S_{l+2}(\mathcal{S}) \leq l$ pour $l \leq d + 1$. (*) Alors il y a un $(\mathcal{O}_X|_{X \cap H})$ -module cohérent $\hat{\mathcal{S}}$ tel que $\hat{\mathcal{S}}|_{X \cap H \setminus Y} = \mathcal{S}$ et $\dim S_{l+2}(\hat{\mathcal{S}}) \leq l$ pour $l \leq d + 1$, à savoir $j_*\mathcal{S}$, où $j : X \cap H \setminus Y \rightarrow X \cap H$ est l'inclusion.*

Démonstration: Récurrence sur d . Le cas $d = -1$, c.-à d. $Y \cap H = \emptyset$ est trivial.

Passage de $d - 1$ à d : Nous pouvons supposer que $X = \mathbb{P}_N$ et $Y = Y \cap H$ est réduit.

Soit $Y' := \text{Sing } Y$, donc $\dim Y' \leq d - 1$.

Fixons un point de $Y \setminus Y'$. Choisissons coordonnées locales z_1, \dots, z_N tel que notre point correspond à 0 et qu'on a un voisinage de la forme $U := \{|z_j| < \epsilon, j = 1, \dots, N\}$. Nous pouvons achever que $H \cap U = \{z \in U \mid z_N = 0\}$ et $Y \cap U = \{z \in U \mid z_{d+1} = \dots = z_N = 0\}$.

Soient $(\epsilon_\nu), (\delta_\nu)$ sont des suites strictement décroissantes avec $\epsilon > \epsilon_\nu \searrow 0, \epsilon > \delta_\nu \searrow 0$. Posons $W_\nu := \{z \in U \mid \max(|z_{d+1}|, \dots, |z_{N-1}|) > \epsilon, |z_N| < \delta\}$

et $W = \bigcup W_\nu$. Les fermetures des tels W dans $\overline{U} \setminus Y$ forment un système fondamental de voisinages fermés de $\overline{U} \cap H \setminus Y$ dans $\overline{U} \setminus Y$.

D'après Corollaire 10.2 le faisceau $\mathcal{S}|_{U \cap H \setminus Y}$ est représenté par un faisceau cohérent \mathcal{S}_1 sur un tel W . Nous pouvons supposer que les conditions sur la profondeur (*) du théorème sont gardées.

Nous voulons montrer qu'il y a une extension \mathcal{S}_2 de \mathcal{S}_1 sur $U_1 \setminus Y$ avec les conditions (*) de profondeur, ou $U_1 := U \cap \{|z_N| < \delta_1\}$

On procède ici comme dans la démonstration de Théorème 7.1, en utilisant [Si3] Theorem 7.4, p. 243. Remarquons qu'on a unicité à isomorphisme près mais ceci suffit pour notre but.

Maintenant il y a une extension cohérente \mathcal{S}_3 de \mathcal{S}_2 à U_1 , où l'on garde les conditions (*), par Lemme 6.4.

Or, $H^0(U_1 \cap \{|z_N| < \delta_1\}, \mathcal{S}_3) \simeq H^0(W, \mathcal{S}_1)$: On montre d'abord que $H^0(U_1 \cap \{|z_N| < \delta_1\} \setminus Y, \mathcal{S}_2) \simeq H^0(W, \mathcal{S}_1)$. Ici on utilise [Si3] Proposition 3.14, p. 141, comme dans la démonstration de Théorème 7.1. Il reste à montrer que $H^0(U_1, \mathcal{S}_3) \simeq H^0(U_1 \setminus Y, \mathcal{S}_2)$, où on utilise [BS] II Theorem 3.6.

En particulier ceci montre que $\mathcal{S}_3 \simeq (j_W)_* \mathcal{S}_1$, où $j_W : W \setminus U_1$ est l'inclusion, donc $\mathcal{S}_3|_{U \cap H}$ est l'image directe de $\mathcal{S}|_{U \cap H \setminus Y}$ par rapport à l'inclusion. On obtient donc que $j_* \mathcal{S}|_{X \cap H \setminus Y'}$ est un $(\mathcal{O}_X|_{X \cap H \setminus Y'})$ -module cohérent avec (*). Par récurrence on conclut que $j_* \mathcal{S}$ a les propriétés désirées.

7.4 Théorème. *Sous les hypothèses du théorème précédant il y a une extension de \mathcal{S} à un faisceau analytique cohérent $\hat{\mathcal{S}}$ sur X tel que $\dim S_{l+2}(\hat{\mathcal{S}}) \leq l$ pour $l \leq d+1$. L'extension est unique à isomorphie près.*

Démonstration: Existence: D'après le théorème précédant nous pouvons supposer que $Y \cap H = \emptyset$, donc Y consiste d'un nombre fini de points. De nouveau nous pouvons nous borner au cas $X = \mathbb{P}_N$. D'après Cor. 10.2 il y a une extension de \mathcal{S} à un faisceau analytique cohérent \mathcal{S}_1 sur un voisinage W de H dans X . On peut supposer que $W = H \cup \{z \mid \max(|z_1|, \dots, |z_N|) > R\}$, où on a identifié $X \setminus H$ avec \mathbb{C}^N . D'après [Si3] Theorem 7.4 il y a une extension analytique cohérente de $\mathcal{S}_1|_{W \setminus H}$ à $X \setminus H$. donc de \mathcal{S}_1 à X .

Unicité: Soient \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 deux telles extensions. L'identité donne une section de $\mathcal{T} := \text{Hom}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ sur $X \cap H \setminus Y$. D'après [Si3] Prop. 3.13, p. 140 \mathcal{T} dispose des mêmes propriétés de profondeur que \mathcal{S}_2 . Par Théorème 7.1 on peut donc trouver une extension de cette section à X qui est unique. On continue comme d'habitude.

7.5 Corollaire. *Sous les hypothèses de Théorème 7.3 il y a une extension de \mathcal{S} à un faisceau analytique cohérent $\hat{\mathcal{S}}$ sur $X \setminus Y$ tel que $\dim S_{l+2}(\hat{\mathcal{S}}) \leq l$ pour $l \leq d+1$. L'extension est unique à isomorphie près.*

Démonstration: L'existence découle directement du théorème précédant. Unicité: Soient $\hat{\mathcal{S}}_1, \hat{\mathcal{S}}_2$ deux telles extensions. Par Lemme 6.4, $j_* \hat{\mathcal{S}}_1$ et $j_* \hat{\mathcal{S}}_2$ sont cohérents et satisfont à (*), ils sont donc isomorphes, donc $\hat{\mathcal{S}}_1$ et $\hat{\mathcal{S}}_2$ aussi.

Les énoncés suivants préparent le prochain paragraphe:

7.6 Théorème. *Soit Y un sous-espace analytique fermé d'un espace analytique complexe X , $\dim Y \cap S_{l+2}(\mathcal{O}_X) \leq l$ pour tout l . Alors $\text{Vect } X \longrightarrow \text{Vect}(X \setminus Y)$ est injectif.*

Démonstration: On procède comme dans la démonstration de Théorème 4.1, en utilisant [BS] II Th. 3.6.

7.7 Proposition. *Soit $\text{prof } \mathcal{O}_{X \setminus Y} \geq 2$, $\dim S_{l+2}(\mathcal{O}_{X \setminus Y}) \leq l$ pour tout $l \leq \dim Y$. Alors l'application $\text{Vect}(X \setminus Y) \longrightarrow \varprojlim \text{Vect}(X_n \setminus Y_n)$ est injective.*

Démonstration: On procède comme dans la démonstration de Théorème 4.2b), en utilisant Théorème 6.5.

8 Fibrés vectoriels algébriques et analytiques

Retournons au contexte algébrique.

8.1 Proposition. *Soit X une variété algébrique complexe, X complet, Y une sous-variété fermée, $\dim S_{l+2}(\mathcal{O}_{X \setminus Y}) \leq l$ pour $l \leq \dim Y$, alors $\text{Vect}(X \setminus Y) \simeq \text{Vect}(X^{an} \setminus Y^{an})$.*

Démonstration: Soit \mathcal{S} un représentant d'un élément de $\text{Vect}^{an}(X^{an} \setminus Y^{an})$. Alors $\dim S_{l+2}(\mathcal{S}) \leq l$ pour $l \leq \dim Y$. Par Lemme 6.4, il y a une extension à un faisceau analytique cohérent sur X^{an} qui est algébrique par GAGA, \mathcal{S} provient donc d'un fibré vectoriel algébrique.

Injectivité: Soit $j : X \setminus Y \longrightarrow X$ l'inclusion, et soient $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ localement libres sur $X \setminus Y$ tels que $\mathcal{S}_1^{an} \simeq \mathcal{S}_2^{an}$. Alors $(j_* \mathcal{S}_1)^{an} \simeq j_*^{an} \mathcal{S}_1^{an} \simeq j_*^{an} \mathcal{S}_2^{an} \simeq (j_* \mathcal{S}_2)^{an}$, voir [Si2], donc $j_* \mathcal{S}_1 \simeq j_* \mathcal{S}_2$. Ceci implique $\mathcal{S}_1 \simeq \mathcal{S}_2$.

Reprenons les anciennes hypothèses.

8.2 Proposition. *Soit $\dim S_{l+2}(\mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y}) \leq l$ pour $l \leq \dim Y \cap H$. Alors*

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}(\hat{X} \setminus \hat{Y}) & \xrightarrow{\simeq} & \varprojlim \text{Vect}(X_n \setminus Y_n) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \text{Vect}(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}) & \xrightarrow{\simeq} & \varprojlim \text{Vect}(X_n^{an} \setminus Y_n^{an}) \end{array}$$

Démonstration: Par Théorème 4.7 on a l'isomorphisme supérieur, par la proposition précédente celui à droite. Il suffit donc de montrer que la flèche à gauche est surjective ou bien que la flèche inférieure est injective.

Pour l'injectivité de la flèche inférieure on peut procéder comme dans la démonstration de Théorème 4.7, en utilisant Proposition 6.10.

8.3 Théorème. *Soit $\dim S_{l+2}(\mathcal{O}_X) \leq l$ pour $l \leq \dim Y \cap H + 1$ le long de $X \cap H \setminus Y$, alors*

$$\varinjlim \text{Vect}(U) \simeq \varinjlim \text{Vect}(U^{an}) \simeq H^1(X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}, \text{Gl}(\mathcal{O}_{X^{an}}))$$

où U parcourt les voisinages ouverts (de Zariski) de $X \cap H \setminus Y$ dans $X \setminus Y$.

Démonstration: D'abord étudions la flèche à droite.

Si $l \leq d + 1$, la fermeture de chaque composante irréductible de $S_{l+2}(\mathcal{O}_{X \setminus H})$ de dimension $> l$ ne rencontre pas $X \cap H \setminus Y$, sa dimension est donc $\leq d + 1$. En agrandissant Y on peut donc supposer que $\dim S_{l+2}(\mathcal{O}_{X \setminus Y}) \leq l$ pour $l \leq d + 1$.

Surjectivité: Un élément de $H^1(X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}, Gl(\mathcal{O}_{X^{an}}))$ est représenté par un fibré vectoriel \mathcal{S} sur un voisinage de $X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}$ dans $X^{an} \setminus Y^{an}$, voir Corollaire 10.4. Par hypothèse, $\dim S_{l+2}(\mathcal{S}) \leq l$ pour $l \leq d + 1$. Par Théorème 7.4 on peut donc supposer que \mathcal{S} admet une extension cohérente \mathcal{S}_1 sur X^{an} . Soit Σ le sous-schéma de X qui correspond au lieu où \mathcal{S}_1 n'est pas localement libre, et soit $U := X \setminus Y \cup \Sigma$. Alors $\Sigma \cap H = \emptyset$, et $\mathcal{S}_1|_{U^{an}}$ est le fibré vectoriel cherché.

Injectivité: Supposons que $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ sont des fibrés vectoriels sur U^{an} tels que $\mathcal{S}_1|_{X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}} \simeq \mathcal{S}_2|_{X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}}$. Par Corollaire 7.5 on a $\mathcal{S}_1 \simeq \mathcal{S}_2$. Pour la bijectivité de la flèche à gauche, il suffit de montrer que $Vect(X \setminus \Sigma) \simeq Vect(X^{an} \setminus \Sigma^{an})$ si $Y \subset \Sigma$, Σ fermé dans X , $\Sigma \cap H = Y \cap H$. Ceci découle de Proposition 8.1.

Remarque: L'hypothèse sur \mathcal{O}_X est assurée si X est normal le long de $X \cap H \setminus Y$ et $\text{codim}_X Y \cap H \geq 4$.

Démonstration de Théorème 1.6: D'abord l'hypothèse sur H implique que $\text{prof } \mathcal{O}_{X,x} = \text{prof } \mathcal{O}_{X \cap H,x} + 1$ pour $x \in X \cap H \setminus Y$. On a donc près de $X \cap H \setminus Y$:

$\dim S_{l+2}(\mathcal{O}_{X \setminus Y}) = \dim S_{l+2}(\mathcal{O}_{X \setminus Y}) \cap H + 1 = \dim S_{l+1}(\mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y}) + 1 \leq l$ pour $l \leq \dim Y \cap H + 1$. On dispose alors de l'hypothèse du théorème précédant. Par Théorème 1.3 on a la bijectivité des flèches supérieures. Par le théorème précédant, la flèche verticale à gauche et la première flèche inférieure sont bijectives. En plus, $Vect(X_n \setminus Y_n) \simeq Vect(X_n^{an} \setminus Y_n^{an})$ par Proposition 8.1. Par Proposition 8.2 on conclut donc que les flèches restantes sont bijectives aussi.

Remarque: L'hypothèse sur $\mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y}$ est donnée en particulier si $X \cap H \setminus Y$ est normal et $\text{codim}_X Y \cap H \geq 4$.

8.4 Proposition. *Supposons que $\dim S_{l+2}(\mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y}) \leq l$ pour tout $l \leq \dim Y \cap H$. Pour $n \gg 0$, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_m Vect(X_m \setminus Y_m) & \longrightarrow & Vect(X_n \setminus Y_n) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \varprojlim_m Vect(X_m^{an} \setminus Y_m^{an}) & \longrightarrow & Vect(X_n^{an} \setminus Y_n^{an}) \end{array}$$

où le noyau de chaque application horizontale est trivial.

Démonstration: On utilise Proposition 4.5 et 8.1.

On peut comparer avec $Vect(X \cap H \setminus Y)$, en utilisant une généralisation du théorème de Kodaira, où $Sing(X)$ dénote le lieu singulier de X :

8.5 Théorème. (voir [HL2] Cor. 4.4) Soit $m \in \mathbb{N}$, $\text{codim}_X Y \geq m + 1$, $\text{prof}_{\text{Sing}(X) \setminus Y} \mathcal{O}_{X \setminus Y} \geq m$, \mathcal{L} un faisceau ample sur X . Alors $H^q(X \setminus Y, \mathcal{L}^{-1}) = H^q(X^{an} \setminus Y^{an}, (\mathcal{L}^{an})^{-1}) = 0$ pour $q < m$.

Alors on en déduit:

8.6 Théorème. Soit $\text{codim}_{X \cap H} Y \cap H \geq 3$, $\text{prof}_{\text{Sing}(X \cap H) \setminus Y} \mathcal{O}_{X \cap H \setminus Y} \geq 2$. Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_m \text{Vect}(X_m \setminus Y_m) & \longrightarrow & \text{Vect}(X \cap H \setminus Y) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \varprojlim_m \text{Vect}(X_m^{an} \setminus Y_m^{an}) & \longrightarrow & \text{Vect}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}) \end{array}$$

où le noyau des applications horizontales est trivial.

Démonstration: La bijectivité des flèches verticales découle de Proposition 8.1.

Soit X_n le sous-espace de X défini par \mathcal{I}^n . De façon analogue à [G2] XI (1.1), on a une suite exacte, voir Lemme 4.4:

$$0 \longrightarrow ((\mathcal{I}^{an})^k / (\mathcal{I}^{an})^{k+1})^{\oplus n^2} \longrightarrow GL_n(\mathcal{O}_{X_{k+1}^{an}}) \longrightarrow GL_n(\mathcal{O}_{X_k^{an}}) \longrightarrow 1$$

On vérifie que $H^1(X \cap H \setminus Y, (\mathcal{I}^{an})^k / (\mathcal{I}^{an})^{k+1}) = 0$ pour tout $k \geq 1$, d'après Théorème 8.5; notons que $(\mathcal{I}^{an})^k / (\mathcal{I}^{an})^{k+1} \simeq (\mathcal{I}^{an} / (\mathcal{I}^{an})^2)^k$.

Démonstration de Théorème 1.7: D'après Théorème 4.2, l'application $\text{Vect}(X \setminus Y) \rightarrow \varprojlim \text{Vect}(X_n \setminus Y_n)$ est injective. Théorème 8.5 implique que le noyau de $\varprojlim \text{Vect}(X_n \setminus Y_n) \rightarrow \text{Vect}(X \cap H \setminus Y)$ est trivial. D'après Proposition 8.1 resp. Théorème 8.6 il est égal si l'on travaille dans le contexte algébrique ou analytique.

9 Fibrés à connexion

a) Cas général

Pour des fibrés à connexion il y a des résultats plus complets.

Si X est une variété algébrique complexe lisse ou bien une variété analytique complexe, soit $\text{Vect}_c(X)$ resp. $\text{Vect}_{ci}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels sur X à connexion resp. connexion intégrable, voir Appendice et [D] I.2. Dans le contexte algébrique nous considérons aussi le cas des fibrés à connexion intégrable régulière où nous écrivons $\text{Vect}_{cir}(X)$, voir [D] II.4.

D'abord

9.1 Théorème. Soit X une variété analytique, Y un sous-ensemble analytique fermé de codimension ≥ 2 . Alors $\text{Vect}_c X \simeq \text{Vect}_c(X \setminus Y)$.

Démonstration: D'après Théorème 7.6 la flèche $Vect\ X \rightarrow Vect(X \setminus Y)$ est injective, donc $Vect_c X \rightarrow Vect_c(X \setminus Y)$ aussi: Soit \mathcal{E} cohérent et localement libre sur X . Une connexion sur $\mathcal{E}|_{X \setminus Y}$ peut être donnée par une application $\mathcal{O}_{X \setminus Y}$ -linéaire $D_1 : P^1(\mathcal{E}|_{X \setminus Y}) \rightarrow \Omega_{X \setminus Y}^1 \otimes \mathcal{E}|_{X \setminus Y}$ avec $D_1 \circ i = id$, voir Proposition 10.6. Or, D_1 correspond à une section D_1 de $Hom(P^1(\mathcal{E}|_{X \setminus Y}), \Omega_{X \setminus Y}^1 \otimes \mathcal{E}|_{X \setminus Y}) \simeq \mathcal{T}|_{X \setminus Y}$, où $\mathcal{T} := Hom(P^1(\mathcal{E}), \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E})$. Or, D_1 s'étend de façon unique à une section de \mathcal{T} qui correspond à une connexion sur \mathcal{E} , d'après [BS] II Theorem 3.6.

Surjectivité: Soit \mathcal{E} cohérent et localement libre sur $X \setminus Y$ avec une connexion et $j : X \setminus Y \rightarrow X$ l'inclusion. Alors $j_*\mathcal{E}$ est cohérent d'après Lemme 6.4. Par un raisonnement comme dans le cas de l'injectivité, la connexion s'étend à une connexion unique sur $j_*\mathcal{E}$ d'après [BS] II Theorem 3.6. Par conséquent, $j_*\mathcal{E}$ est localement libre, voir [Ma] Remark (1.2).

Dans le cas algébrique on a

9.2 Théorème. *Soit X une variété algébrique complexe, Y un sous-ensemble algébrique fermé de codimension ≥ 2 .*

a) *Si X est lisse on a $Vect_c X \simeq Vect_c(X \setminus Y)$.*

b) *Si X est complet et $X \setminus Y$ lisse on a $Vect_c(X \setminus Y) \simeq Vect_c(X^{an} \setminus Y^{an})$.*

Démonstration: a) On raisonne comme dans la démonstration précédente. D'après Théorème 4.1 on a que la flèche $Vect\ X \rightarrow Vect(X \setminus Y)$ est injective, donc $Vect_c X \rightarrow Vect_c(X \setminus Y)$ aussi: utilisons Proposition 2.7.

Surjectivité: Soit \mathcal{E} cohérent et localement libre sur $X \setminus Y$ avec une connexion et $j : X \setminus Y \rightarrow X$ l'inclusion. Alors $j_*\mathcal{E}$ est cohérent d'après Proposition 2.2. La connexion s'étend à une connexion unique sur $j_*\mathcal{E}$ d'après Proposition 2.7. Par conséquent, $j_*\mathcal{E}$ est localement libre.

b) D'après Proposition 8.1 on a $Vect(X \setminus Y) \simeq Vect(X^{an} \setminus Y^{an})$. De plus, si \mathcal{E} est un fibré vectoriel sur $X \setminus Y$, une connexion sur \mathcal{E}^{an} provient d'une connexion unique sur \mathcal{E} : on utilise Proposition 6.2 ici.

Mauntenant retournons à la situation habituelle.

9.3 Théorème. *Supposons que $X \setminus Y$ est lisse de dimension ≥ 3 , H coupe $X \setminus Y$ transversalement, $\text{codim}_X Y \cap H \geq 4$. On a un diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} Vect_c(X \setminus Y) & \simeq & Vect_c(\hat{X} \setminus \hat{Y}) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ Vect_c(X^{an} \setminus Y^{an}) & \simeq \lim_{\rightarrow} Vect_c(V) & \simeq Vect_c(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}) \end{array}$$

où V parcourt les voisinages ouverts de $X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}$ dans $X^{an} \setminus Y^{an}$.

Démonstration: La verticale à gauche est bijective d'après Théorème 9.2b). La verticale à droite est bijective aussi: D'abord, on a $Vect(\hat{X} \setminus \hat{Y}) \simeq Vect(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an})$ d'après Proposition 8.2. Soit \mathcal{E} un fibré vectoriel sur $\hat{X} \setminus \hat{Y}$. Supposons que nous avons une connexion sur \mathcal{E}^{an} : celle-ci peut être donnée par une section de $Hom(P^1(\mathcal{E}^{an}), \Omega_{\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}}^1 \otimes \mathcal{E}^{an}) \simeq \mathcal{T}^{an}$, où $\mathcal{T} := Hom(P^1(\mathcal{E}), \Omega_{\hat{X} \setminus \hat{Y}}^1 \otimes \mathcal{E})$. Avec Proposition 6.7 on peut conclure que la section

vient d'une section unique de \mathcal{T} , celle-ci correspond à une connexion sur \mathcal{E} . La horizontale supérieure est injective d'après Théorème 4.2 et 3.1. La composition des flèches inférieures est donc injective aussi. Surjectivité: Un élément de $Vect_c(\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an})$ est représenté par un fibré \mathcal{E}^{an} avec connexion, où \mathcal{E}^{an} provient d'un fibré \mathcal{E} sur $\hat{X} \setminus \hat{Y}$. D'après Théorème 3.6 il y a une extension cohérente \mathcal{S} de \mathcal{E} à $X \setminus Y$. En fait, $\dim \overline{S_l(\mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}} / \mathcal{I}\mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}})} \cap Y < l-2$ pour $l \leq \dim Y \cap H + 2$ parce que $\text{codim}_X Y \cap H \geq 4$, et $\text{prof } \mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}} / \mathcal{I}\mathcal{O}_{\hat{X} \setminus \hat{Y}} \geq 2$ parce que $\dim X \setminus Y \geq 3$. La connexion sur \mathcal{E}^{an} est donnée par une section de $Hom(P^1(\mathcal{E}^{an}), \Omega_{\hat{X}^{an} \setminus \hat{Y}^{an}}^1 \otimes \mathcal{E}^{an})$. Or, la condition la condition de Proposition 6.8 est vérifiée pour $\mathcal{T}_1 := Hom(P^1(\mathcal{S}^{an}), \Omega_{X^{an} \setminus Y^{an}}^1 \otimes \mathcal{S}^{an})$ au lieu de \mathcal{S} et $m = 2$: on applique [Si3] Lemma 3.15 ici. La section provient donc d'une section unique de \mathcal{T}_1 , celle-ci correspond à une connexion sur \mathcal{S}^{an} . On conclut que \mathcal{S}^{an} est localement libre.

Il reste à montrer que la première flèche inférieure est surjective aussi. Or, on a $\lim_{\rightarrow} Vect(V) \simeq Vect(X^{an} \setminus Y^{an} | X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an})$ d'après Corollaire 10.4 (voir les notations y utilisées). Par [Go] II Th. 3.3.1 on conclut que $\lim_{\rightarrow} Vect_c(V) \simeq Vect_c(X^{an} \setminus Y^{an} | X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an})$. Un élément de $Vect_c(X^{an} \setminus Y^{an} | X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an})$ est représenté par un $(\mathcal{O}_{X^{an}} | X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an})$ -module cohérent localement libre \mathcal{E} avec une connexion. Or, \mathcal{E} peut être étendu à un faisceau \mathcal{S} sur X d'après Théorème 7.4. La connexion du fibré vectoriel \mathcal{E} donne une section de $Hom(P^1(\mathcal{S}), \Omega_X^1 \otimes \mathcal{S})$ sur $X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}$. Par Théorème 7.1 il y a une extension unique sur X^{an} . La restriction à $X^{an} \setminus Y^{an}$ définit une connexion sur $\mathcal{S} | X^{an} \setminus Y^{an}$, il s'agit donc d'un fibré vectoriel analytique à connexion.

En ce qui concerne la flèche inférieure à gauche, il y a une variante:

9.4 Théorème. *Supposons que $X \setminus Y$ est lisse de dimension ≥ 3 . Alors il y a un isomorphisme*

$$Vect_c(X^{an} \setminus Y^{an}) \simeq \lim_{\rightarrow} Vect_c(U \setminus Y^{an})$$

où U parcourt les voisinages ouverts de $X^{an} \cap H^{an}$ dans X^{an} .

Démonstration: Surjectivité: Soit U comme dans [Ha1] et \mathcal{E} un fibré vectoriel à connexion sur $U \setminus Y^{an}$. En particulier \mathcal{E} est un faisceau analytique cohérent. D'après [Ha1] Theorem 2.2 il y a une extension cohérente \mathcal{S} sur $X^{an} \setminus Y^{an}$. La connexion sur \mathcal{E} donne une section de $Hom(P^1(\mathcal{S}), \Omega_{X^{an}}^1 \otimes \mathcal{S})$ sur $U \setminus Y^{an}$. Par [Ha1] Theorem 2.1 il y a une extension unique sur $X^{an} \setminus Y^{an}$ qui donne une connexion à \mathcal{S} . Ce faisceau est donc un fibré vectoriel analytique à connexion.

Injectivité: avec [Ha1] Theorem 2.1.

b) Fibrés à connexion intégrable

D'abord

9.5 Théorème. *Sous les hypothèses de Théorème 9.1, on a $Vect_{ci} X \simeq Vect_{ci}(X \setminus Y)$.*

Démonstration: On applique Lemme 10.9 ou bien Lemme 10.10.

9.6 Théorème. *Sous les hypothèses de Théorème 9.2, on a :*

- a) *Si X est lisse: $Vect_{ci}X \simeq Vect_{ci}(X \setminus Y)$, et $Vect_{cir}X \simeq Vect_{ci}(X^{an})$*
- b) *Si X est complet et $X \setminus Y$ lisse on a $Vect_{cir}(X \setminus Y) \simeq Vect_{ci}(X \setminus Y) \simeq Vect_{ci}(X^{an} \setminus Y^{an})$.*

Démonstration: a) La première isomorphie s'obtient comme dans la démonstration de Théorème 9.2a). Pour la deuxième, voir [D] II Théorème 5.9.

b) Traitons d'abord l'analogie de Théorème 9.1. La paire $(X^{an}, X^{an} \setminus Y^{an})$ est 2-connexe, donc $\pi_k(X^{an} \setminus Y^{an}, x) \simeq \pi_k(X^{an}, x)$ pour $k = 0, 1$, $x \in X^{an} \setminus Y^{an}$. Considérons maintenant l'analogie de Théorème 9.2:

- a) On procède comme dans la démonstration de Théorème 9.2a).
 - b) $Vect_{cir}(X \setminus Y) \simeq Vect_{ci}(X^{an} \setminus Y^{an})$: comme en a) avec [D] loc.cit.
- $Vect_{cir}(X \setminus Y) \simeq Vect_{ci}(X \setminus Y)$: avec la définition de la régularité: [D] II 4.1(i), II 4.2, parce que $\text{codim}_X Y \geq 2$.

9.7 Théorème. *Soit $X \subset \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ un sous-espace analytique fermé, Y une partie analytique fermée, $X \setminus Y$ lisse, partout de dimension ≥ 3 , H un hyperplan. Fixons une stratification de Whitney de (X, Y) . Supposons qu'il y a un sous-ensemble analytique Σ de $Y \cap H$ tel que $\text{codim}_X \Sigma \geq 3$ et H coupe toutes les strates de X transversalement hors de Σ . Alors on a un diagramme commutatif d'isomorphismes:*

$$\begin{array}{ccc} Vect_{cir}(X \setminus Y) & \simeq & Vect_{cir}(X \cap H \setminus Y) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ Vect_{ci}(X^{an} \setminus Y^{an}) & \simeq & Vect_{ci}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}) \end{array}$$

Démonstration: Soit \mathcal{E} un fibré vectoriel (analytique) sur $X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}$ à connexion intégrable. Si $X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}$ est connexe, il est donné à isomorphie près par un homomorphisme $\pi_1(X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}) \rightarrow GL_k(\mathbb{C})$ où k est le rang de \mathcal{E} . Autrement il faut regarder chaque composante connexe séparément. Voir [D] I.1.4, 2.17.

Par [HL1] on sait, si $\Sigma = \emptyset$, que pour chaque point x de $X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}$, on a $\pi_k(X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}, x) \simeq \pi_k(X^{an} \setminus Y^{an}, x)$, $k = 0, 1$. En général, on obtient le même énoncé, en comparant les deux variétés d'abord avec l'intersection par un sous-espace linéaire de dimension 2 qui est contenu dans H et coupe $X \setminus Y$ transversalement.

Ceci signifie que \mathcal{E} peut être étendu à un fibré \mathcal{F} sur $X^{an} \setminus Y^{an}$ à connexion intégrable qui est unique, à isomorphisme près. La flèche inférieure est donc bijective.

Par [D] II.5.9, \mathcal{E} provient d'un fibré vectoriel algébrique à connexion intégrable régulière qui est unique, à isomorphie près. Le même vaut pour \mathcal{F} . Comme la restriction d'un fibré vectoriel algébrique à connexion intégrable régulière à un sous-espace lisse donne un objet de la même catégorie on obtient que les flèches verticales sont bijectives.

Démonstration de Théorème 1.8: Ceci résulte aussitôt du théorème précédant, avec $\Sigma := Y \cap H$. Notons que les isomorphismes verticaux sont

déjà connus, par Théorème 9.1, on a donc $Vect_{cir}(X \setminus Y) \simeq Vect_{ci}(X \setminus Y)$ et l'analogie pour les variétés complétées.

De nouveau il y a une variante:

9.8 Théorème. *Soit $\dim X \geq 3$, $X \setminus Y$ lisse. Alors il y a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} Vect_{cir}(X \setminus Y) & & \\ \downarrow \simeq & \searrow \simeq & \\ Vect_{ci}(X^{an} \setminus Y^{an}) & \xrightarrow{\simeq} & \lim_{\rightarrow} Vect_{ci}(U \setminus Y^{an}) \end{array}$$

où U parcourt les voisinages ouverts de $X^{an} \cap H^{an}$ dans X^{an} .

Démonstration: Par [HL1] on sait que pour chaque point x de $U \setminus Y^{an}$, $\pi_k(U \setminus Y^{an}, x) \simeq \pi_k(X^{an} \setminus Y^{an}, x)$, $k = 0, 1$, si U est un voisinage convenable. Ceci implique la bijectivité de la flèche inférieure.

La bijectivité de la flèche verticale se démontre comme dans la démonstration précédente.

10 Appendice

a) Démonstrations alternatives

Démonstration directe de Théorème 1.2 pour $m = 2$:

a) D'après Proposition 2.2 on a: $R^s j_* \mathcal{S}$ est cohérent pour $s = 0, 1$, où $j: X \setminus Y \rightarrow X$ est l'inclusion.

b) D'après Lemme 2.8, le faisceau $\mathcal{T} := j_* \mathcal{S}$ est cohérent, et $prof \mathcal{T} \geq 2$.

c) Par b) et Théorème 1.1 on obtient $H^s(X, j_* \mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^{-\nu}) = 0$, $s = 0, 1, \nu \gg 0$.

d) Soit x un point fermé de X . D'après b) on a $H_x^1(j_* \mathcal{S}) = 0$, donc $\mathbb{H}_x^1(Rj_* \mathcal{S}) \simeq H_x^0(R^1 j_* \mathcal{S})$.

Mais $\mathbb{H}_x^1(Rj_* \mathcal{S}) \simeq \lim_{\rightarrow} \mathbb{H}^1(U, U \setminus \{x\}, Rj_* \mathcal{S}) \simeq \lim_{\rightarrow} \mathbb{H}^1(U \setminus Y, U \setminus (Y \cup \{x\}), \mathcal{S}) = 0$ si $x \in Y$. En plus, $R^1 j_* \mathcal{S}$ est concentré sur Y . En total, $H_x^0(R^1 j_* \mathcal{S}) = 0$ toujours, donc $prof R^1 j_* \mathcal{S} \geq 1$.

e) Par d) et Théorème 1.1 on conclut que $H^0(X, (R^1 j_* \mathcal{S}) \otimes \mathcal{L}^{-\nu}) = 0$, $\nu \gg 0$.

f) Par la formule d'adjonction on obtient, $\mathcal{L}^{-\nu}$ étant localement libre:

$$(R^s j_* \mathcal{S}) \otimes \mathcal{L}^{-\nu} \simeq R^s j_* (\mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^{-\nu}).$$

Par c), e) on obtient donc que $H^p(X, R^q j_* (\mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^{-\nu})) = 0$, $p + q \leq 1, \nu \gg 0$. Ceci implique notre énoncé.

Autre démonstration de Lemme 2.5:

On peut supposer que \mathcal{S} est cohérent sur X . Alors $\oplus_{n \geq 0} H^s(X, \mathcal{S}(n))$ est un $k[Z_0, \dots, Z_r]$ -module de type fini pour tout s : Pour $s = 0$ voir [G4] III 2.3.2, pour $s > 0$ on sait que $H^s(X, \mathcal{S}(n))$ est de dimension fini et 0 si $n \gg 0$.

On en déduit que $\oplus_{n \geq 0} H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}(n))$ est un $k[Z_0, \dots, Z_r]$ -module de type fini pour $s < m$: il suffit de montrer que $\oplus_{n \geq 0} H^s(X, R^l j_* \mathcal{S}(n))$ est un $k[Z_0, \dots, Z_r]$ -module de type fini pour $l < m$, et $R^l j_* \mathcal{S}$ est cohérent d'après

Proposition 2.2.

D'autre part, $H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}(n))$ est de dimension finie pour n fixe et $s < m$, par Proposition 2.2, et $H^s(X \setminus Y, \mathcal{S}(n)) = 0$ pour $n \ll 0$ d'après Théorème 1.2. D'où le résultat.

Démonstration directe de Corollaire 3.7:

Soit $\hat{j} : \hat{X} \setminus \hat{Y} \rightarrow \hat{X}$ l'inclusion. D'après Proposition 2.2, les faisceaux $j_*(\mathcal{S}/\mathcal{I}\mathcal{S})$ et $R^1 j_*(\mathcal{S}/\mathcal{I}\mathcal{S})$ sont cohérents. Par conséquent, $\oplus_{k \geq 0} R^l j_*(\mathcal{I}^k \mathcal{S}/\mathcal{I}^{k+1} \mathcal{S})$ est un $\oplus_{k \geq 0} \mathcal{I}^k/\mathcal{I}^{k+1}$ -module de type fini, $l = 0, 1$. D'après [G2] IX Th. 2.1 on peut conclure que $\mathcal{T} := \hat{j}_* \mathcal{S}$ est cohérent. ce qui implique Corollaire 3.7.

Remarque: La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{\hat{Y}}^0 \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \hat{j}_* \hat{j}^* \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{H}_{\hat{Y}}^1 \mathcal{T} \rightarrow 0$$

implique que $\mathcal{H}_{\hat{Y}}^l \mathcal{T} = 0, l \leq 1$, donc $\text{prof } \mathcal{T}_y \geq 2$ pour $y \in \hat{Y}$. On a donc $\text{prof } \mathcal{T} \geq 2$. Mais ceci ne suffit pas afin d'appliquer [G2] XII Théorème 3.1 pour une extension cohérente de \mathcal{T} à X et démontrer Théorème 3.6!

On devrait même avoir $\text{prof } \mathcal{T}/\mathcal{I}\mathcal{T} \geq 2$, c.-à d. $\mathcal{T}/\mathcal{I}\mathcal{T} \simeq j_* j^*(\mathcal{T}/\mathcal{I}\mathcal{T})$.

Démonstration directe de Théorème 3.6:

Notons que \mathcal{S} induit un faisceau $\hat{\mathcal{S}}$ sur $\hat{X} \setminus \hat{Y}$. Soit $\hat{j} : \hat{X} \setminus \hat{Y} \rightarrow \hat{X}$ l'inclusion. D'après [G2] IX Th. 2.1, $\mathcal{T} := \hat{j}_* \hat{\mathcal{S}}$ est cohérent.

On continue maintenant comme dans la démonstration de la surjectivité de $\lim_{\rightarrow} \text{Vect } U \rightarrow \text{Vect } \hat{X} \setminus \hat{Z}$ à la fin de la démonstration de Théorème 7.2 dans [HL2].

Ceci devrait revenir essentiellement à une démonstration du résultat de Grothendieck [G2] XII Théorème 3.1 dans le sens de sa démonstration originale comme il l'y indique (p. 149).

Démonstration alternative de Lemme 4.4:

Soit $k \geq n$ et \mathcal{E} un fibré vectoriel sur X_{k+1} pour lequel la restriction à X_k est trivial. Soient $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(X \cap H \setminus Y, \mathcal{E}|_{X_k})$ des sections qui donnent une base pour chaque fibre. L'hypothèse implique que les sections s'étendent à X_{k+1} , elles définissent la même base pour chaque fibre; en fait, on a une suite exacte

$$\Gamma(X \cap H \setminus Y, \mathcal{E}/\mathcal{I}^{k+1} \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(X \cap H \setminus Y, \mathcal{E}/\mathcal{I}^k \mathcal{E}) \rightarrow H^1(X \cap H \setminus Y, \mathcal{I}^k \mathcal{E}/\mathcal{I}^{k+1} \mathcal{E})$$

et $\mathcal{I}^k \mathcal{E}/\mathcal{I}^{k+1} \mathcal{E} \simeq (\mathcal{I}^k/\mathcal{I}^{k+1}) \otimes (\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}) \simeq (\mathcal{I}^k/\mathcal{I}^{k+1})^r$, où r est le rang de \mathcal{E} , parce que $\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}$ est trivial. On a donc $H^1(X \cap H \setminus Y, \mathcal{I}^k \mathcal{E}/\mathcal{I}^{k+1} \mathcal{E}) = 0$ d'après l'hypothèse.

Autre démonstration de Théorème 1.7:

Autre méthode: Supposons que $\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}$ est trivial. Soient s_1, \dots, s_k des section de ce fibré qui donnent une base pour chaque fibre. Maintenant $(\mathcal{I}^n \mathcal{E})/(\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{E}) \simeq \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \otimes (\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}) \simeq (\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1})$, donc $H^l(X \cap H \setminus Y, (\mathcal{I}^n \mathcal{E})/(\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{E})) = 0, l = 0, 1$ à cause de Théorème 8.5. Ceci implique que s_1, \dots, s_k proviennent des sections de $\mathcal{E}/\mathcal{I}^n \mathcal{E}$, $n \gg 0$, donc des sections de \mathcal{E} , par Théorème 1.2. Celles-

ci définissent encore une base de chaque fibre sur $X \cap H \setminus Y$, donc \mathcal{E} est trivial sur un voisinage ouvert de Zariski de $X \cap H \setminus Y$ dans $X \setminus Y$. Par Théorème 4.1 \mathcal{E} est trivial.

Deuxième démonstration de Théorème 1.8:

On utilise d'abord Théorème 9.1 où on peut remplacer c par ci partout. Car l'intégrabilité d'une connexion sur \mathcal{E} signifie que la courbure est 0, la courbure étant une section de $\text{Hom}(\mathcal{E}, \Omega_X^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E})$. On peut donc raisonner avec Proposition 6.8.

On a aussi $\text{Vect}_{ci}(X \cap H \setminus Y) \simeq \text{Vect}_{ci}(X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an})$. D'autre part, la démonstration précédente montre qu'on peut étendre chaque fibré à connexion intégrable sur $X \cap H \setminus Y$ à un voisinage, donc à $\hat{X} \setminus \hat{Y}$. Par conséquent, $\text{Vect}_{ci}(X \setminus Y) \rightarrow \text{Vect}_{ci}(X \cap H \setminus Y)$ est surjectif.

Injectivité: Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ des fibrés vectoriels sur $X^{an} \setminus Y^{an}$ à connexion intégrable dont la restriction à $X^{an} \cap H^{an} \setminus Y^{an}$ est isomorphe. Alors la restriction à un voisinage est isomorphe aussi, donc $\hat{\mathcal{E}}_1 \simeq \hat{\mathcal{E}}_2$. Par Théorème 8.7 on obtient l'isomorphie $\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_2$.

Démonstration alternative de Théorème 9.5: On procède comme dans la démonstration de Théorème 9.1.

Démonstration alternative de Théorème 9.6 b): On démontre $\text{Vect}_{ci}(X \setminus Y) \simeq \text{Vect}_{ci}(X^{an} \setminus Y^{an})$ par voie directe, comme Théorème 9.2 b).

b) Compléments sur la théorie des faisceaux

Dans ce paragraphe soit X un espace paracompact, A une partie fermée. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de A , $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement pareil tel que $\overline{V_i} \subset U_i, i \in I$, \mathcal{T}_i un faisceau sur $U_i, i \in I$. Ici on travaille avec des faisceaux d'ensembles.

10.1 Théorème. *Soit \mathcal{S} un faisceau sur A , $\mathcal{S}|_{A \cap U_i} \simeq \mathcal{T}_i|_{A \cap U_i}, i \in I$, alors il y a un voisinage ouvert U de A dans X et un faisceau $\tilde{\mathcal{S}}$ sur U tel que $\tilde{\mathcal{S}}|_{U \cap V_i} \simeq \mathcal{T}_i|_{U \cap V_i}, i \in I$.*

Démonstration: On procède comme dans la démonstration de [Go] II Th. 3.3.1. Fixons des isomorphismes $\mathcal{S}|_{A \cap U_i} \simeq \mathcal{T}_i|_{A \cap U_i}$. Ceci donne un cocycle (g_{ij}) par rapport au recouvrement $(A \cap \overline{V_i})$ de A , où $g_{ij} \in \Gamma(A \cap \overline{V_i} \cap \overline{V_j}, \text{Iso}(\mathcal{T}_j|_{U_i \cap U_j}, \mathcal{T}_i|_{U_i \cap U_j}))$. Par [Go] II Th. 3.3.1 il y a une extension de la section g_{ij} à une section \tilde{g}_{ij} qui est définie sur un voisinage ouvert W_{ij} de $A \cap \overline{V_i} \cap \overline{V_j}$. Soit U l'ensemble de tous les $x \in X$ avec les propriétés suivantes: si $x \in \overline{V_i} \cap \overline{V_j}$, on a $x \in W_{ij}$, si $x \in \overline{V_i} \cap \overline{V_j} \cap \overline{V_k}$, on a $\tilde{g}_{ij}(x) \circ \tilde{g}_{jk}(x) = \tilde{g}_{ik}(x)$.

Alors U est ouvert: Soit $x \in U$. Il y a un voisinage $W(x)$ de x qui ne rencontre qu'un nombre fini des $\overline{V_i}$, disons $\overline{V_{i_1}}, \dots, \overline{V_{i_n}}$. En plus, on peut supposer que $x \in \overline{V_i}$ pour $i = i_1, \dots, i_n$. Maintenant on peut achever que $W(x) \subset U$.

Évidemment, U est un voisinage de A , il s'agit du voisinage cherché: on recolle les $\mathcal{T}_i|U \cap V_i$ par $\tilde{g}_{ij}|V_i \cap V_j \cap U$.

10.2 Corollaire. *Soit A une partie analytique fermée de l'espace analytique complexe X . Chaque $\mathcal{O}_X|A$ -module cohérent (resp. cohérent localement libre) admet une extension à un \mathcal{O}_U -module cohérent (resp. cohérent localement libre), U étant un voisinage ouvert convenable de A dans X .*

Pour l'unicité, on a

10.3 Théorème. *Si \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont des faisceaux sur X tels que $\mathcal{S}_1|A \simeq \mathcal{S}_2|A$ alors il y a un voisinage U de A tel que $\mathcal{S}_1|U \simeq \mathcal{S}_2|U$.*

Démonstration: On a une section du faisceau $\text{Iso}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ sur A , elle peut être étendue sur un voisinage.

10.4 Corollaire. *Soit A une partie analytique fermée de l'espace analytique complexe X , alors*

$$\lim_{\rightarrow} \text{Coh } U \simeq \text{Coh}(X|A), \quad \lim_{\rightarrow} \text{Vect } U \simeq \text{Vect}(X|A)$$

Ici U parcourt tous les voisinages ouverts de A dans X , et $\text{Coh } U$ resp. $\text{Coh}(X|A)$ dénote la catégorie des \mathcal{O}_U - resp. $\mathcal{O}_X|A$ -modules cohérents, à isomorphie près. Finalement, $\text{Vect}(X|A)$ dénote la catégorie des $\mathcal{O}_X|A$ -modules cohérents localement libres, à isomorphie près.

La deuxième partie du corollaire peut aussi être écrite comme

$$\lim_{\rightarrow} H^1(U, GL(\mathcal{O}_X)) \simeq H^1(A, GL(\mathcal{O}_X))$$

Cette relation est en même temps conséquence d'un théorème général sur la cohomologie des faisceaux non-abéliens; dans le cas abélien voir [Go] II Th. 4.11.1:

10.5 Théorème. *Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes (non-nécessairement abéliens) sur X . Alors*

$$\lim_{\rightarrow} H^1(U, \mathcal{F}) \simeq H^1(A, \mathcal{F})$$

où U parcourt tous les voisinages ouverts de A dans X .

Démonstration: Surjectivité: Supposons qu'un élément de $H^1(A, \mathcal{F})$ est donné. Nous pouvons supposer qu'il est représenté par un cocycle (g_{ij}) par rapport au recouvrement $(A \cap \overline{V}_i)$ de A . On peut étendre g_{ij} à un voisinage W_{ij} de $A \cap \overline{V}_i \cap \overline{V}_j$. On continue comme dans la démonstration de Théorème 10.1.

Injectivité: Soient (g_{ij}) et (h_{ij}) des cocycles par rapport à (U_i) qui définissent le même élément de $H^1(A, \mathcal{F})$. Quitte à rétrécir il y a $f_i \in \Gamma(A \cap \overline{V}_i, \mathcal{F})$ tels que $h_{ij} = f_i g_{ij} f_j^{-1}$ sur $A \cap \overline{V}_i \cap \overline{V}_j$. On peut étendre f_i à une section \tilde{f}_i sur un voisinage ouvert W_i de $A \cap \overline{V}_i$ dans U_i . Soit U l'ensemble de tous les points x avec les propriétés suivantes:

si $x \in \overline{V}_i$ alors $x \in W_i$,

si $x \in \overline{V_i} \cap \overline{V_j}$ alors $h_{ij}(x) = \tilde{f}_i(x)g_{ij}(x)\tilde{f}_j(x)^{-1}$.

On vérifie que U est un voisinage ouvert de A dans X et que $(h_{ij}|_{U \cap V_i \cap V_j})$ et $(g_{ij}|_{U \cap V_i \cap V_j})$ sont cohomologues, il définissent donc le même élément de $H^1(U, \mathcal{F})$.

c) Connexions

Soit X une variété analytique complexe, \mathcal{E} un fibré vectoriel holomorphe sur X . Il y a plusieurs façons de définir la notion d'une connexion sur X , voir [D], [Ma]:

Soit \mathcal{J} l'idéal de la diagonale dans X^2 , $p_1, p_2 =$ projections canoniques de X^2 sur X , $P^1 := \mathcal{O}_{X^2}/\mathcal{J}^2$ et $P^1(\mathcal{E}) := (p_1)_*(P^1 \otimes_{\mathcal{O}_{X^2}} p_2^* \mathcal{E})$ le faisceau des 1-jets dans \mathcal{E} . La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{X^2}/\mathcal{J}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{X^2}/\mathcal{J} \rightarrow 0$$

conduit à une suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{i} P^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{q} \mathcal{E} \rightarrow 0$$

Notons que $(p_1)_*((\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \otimes_{\mathcal{O}_{X^2}} p_2^* \mathcal{E}) \simeq (p_2)_*((\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \otimes_{\mathcal{O}_{X^2}} p_2^* \mathcal{E}) \simeq \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E}$ parce que $(p_2)_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \simeq \Omega_X^1$, et $(p_1)_*((\mathcal{O}_{X^2}/\mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{O}_{X^2}} p_2^* \mathcal{E}) \simeq (p_2)_*((\mathcal{O}_{X^2}/\mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{O}_{X^2}} p_2^* \mathcal{E}) \simeq \mathcal{E}$ parce que $(p_2)_*(\mathcal{O}_{X^2}/\mathcal{J}) \simeq \mathcal{O}_X$.

On a une application $j^1 : \mathcal{E} \rightarrow P^1(\mathcal{E})$ qui associe à chaque section son 1-jet, induite par $f \mapsto f \circ p_2$. Elle est seulement \mathbb{C}_X -linéaire: on a $j^1(fs) = i(df \otimes s) + fj^1(s)$ pour $f \in \mathcal{O}_{X,x}$, $s \in \mathcal{E}_x$. On a $q \circ j^1 = id$, donc q est vraiment surjectif, et j^1 donne alors un scindage de la suite exacte dans la catégorie des \mathbb{C}_X -modules.

10.6 Proposition. *Il est équivalent de donner*

a) *une application \mathbb{C}_X -linéaire $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E}$ telle que $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$,*

b) *une application \mathcal{O}_X -linéaire $D_1 : P^1(\mathcal{E}) \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E}$ telle que $D_1 \circ i = id$,*

c) *une application \mathcal{O}_X -linéaire $D_2 : \mathcal{E} \rightarrow P^1(\mathcal{E})$ telle que $q \circ D_2 = id$,*

où les applications sont liées comme suit: $D_2 := j^1 - i \circ \nabla$, $i \circ D_1 = id - D_2 \circ q$, $\nabla := D_1 \circ j^1$.

Pour $a \Leftrightarrow c$) voir [D], où on trouve la relation $D_2 = j^1 - i \circ \nabla$ aussi. Notons que c) signifie que D_2 donne un scindage de la suite exacte en haut dans la catégorie des \mathcal{O}_X -modules. Il est bien connu que ceci est équivalent à b) avec la relation $D_2 \circ q + i \circ D_1 = id$. On obtient $\nabla = D_1 \circ j^1$ comme conséquence; cette relation semble être conforme avec [Ma]. En total, on voit comme on passe de ∇ à D_2 , de D_2 à D_1 et de D_1 à ∇ . Pour compléter les relations signalons qu'on peut raisonner au sens inverse aussi: $i \circ D_1 = i \circ \nabla \circ q + id - j^1 \circ q$, $D_2 = j^1 - i \circ D_1 \circ j^1$, $i \circ \nabla = j^1 - D_2$.

La première définition est la définition usuelle mais les autres ont un avantage du point de vue théorique parce qu'il s'agit des applications \mathcal{O}_X -linéaires.

Remarque: On peut remplacer \mathcal{E} par un faisceau cohérent. La suite en haut reste exacte parce qu'on a encore $q \circ j^1 = id$, q est donc surjectif. Proposition 10.6 reste encore valable. Mais par [Ma] Remark (1.2), l'existence de ∇

garantit que le faisceau cohérent est automatiquement localement libre.

Rappelons qu'une connexion ∇ sur \mathcal{E} induit des applications \mathbb{C}_X -linéaires $\nabla^p : \Omega_X^p \otimes \mathcal{E} \rightarrow \Omega_X^{p+1} \otimes \mathcal{E}$, où $\nabla^0 = \nabla$, voir [D]. Or, ∇ est dit intégrable si $\nabla^1 \circ \nabla = 0$.

En ce qui concerne les connexions sur un fibré vectoriel donné, on a le résultat suivant:

10.7 Proposition. *Soit \mathcal{E} un fibré vectoriel sur X .*

- a) *Si $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E})) = 0$ il y a au plus une connexion sur \mathcal{E} .*
- b) *Si $H^1(X, \Omega_X^1 \otimes \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E})) = 0$ il y a au moins une connexion sur \mathcal{E} .*
- c) *Si $H^0(X, \Omega_X^2 \otimes \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E})) = 0$ toute connexion sur \mathcal{E} est intégrable.*

Démonstration: a), b): La suite exacte (*) en haut conduit à une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}, P^1(\mathcal{E})) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow 0$$

donc

$$H^0(X, \text{Hom}(\mathcal{E}, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E})) \rightarrow H^0(X, \text{Hom}(\mathcal{E}, P^1(\mathcal{E}))) \rightarrow H^0(X, \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \rightarrow H^1(X, \text{Hom}(\mathcal{E}, \Omega_X^1 \otimes \mathcal{E})).$$

Or, $\text{id} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définit un élément de $H^0(X, \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}))$, et une connexion sur \mathcal{E} correspond à une image inverse dans $H^0(X, \text{Hom}(\mathcal{E}, P^1(\mathcal{E})))$, par Proposition 10.6. Le reste est clair.

c) Soit ∇^1 défini comme toute à l'heure. Or, l'application $\nabla^1 \circ \nabla$ est même \mathcal{O}_X -linéaire, voir [D], elle définit donc un élément de $H^0(X, \Omega_X^2 \otimes \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}))$.

Soit $\text{Vect}_c(X)$ et $\text{Vect}_{ci}(X)$ défini comme dans l'introduction. D'après [D] nous avons que $\text{Vect}_c(X)$ a la structure d'un semi-anneau avec unité (donnée par (\mathcal{O}_X, d)), le même vaut pour $\text{Vect}_{ci}(X)$. De plus, on a $\text{Vect}_{ci}(X) \simeq H^1(X, GL(\mathbb{C}))$.

d) Un lemme sur les suites spectrales

Le lemme suivant devrait être bien connu (il est implicitement appliqué dans [H2] p. 223, par exemple):

10.8 Lemme. *Soit $f : E \rightarrow E'$ un homomorphisme de suites spectrales $(E_r)_{r \geq r_0}$, $(\tilde{E}_r)_{r \geq r_0}$, avec $r_0 \geq 1$. Supposons que $E_{r_0}^{pq} = \tilde{E}_{r_0}^{pq} = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$ et que f induit des isomorphismes $E_{r_0}^{pq} \simeq \tilde{E}_{r_0}^{pq}$ si $q \leq n$ (il suffit: si $q \leq n - \frac{r_0-1}{r_0}p$). Alors f induit des isomorphismes $E_{\infty}^{pq} \simeq \tilde{E}_{\infty}^{pq}$, $p + q \leq n$.*

Démonstration: On démontre par récurrence que f induit des isomorphismes $E_r^{pq} \simeq \tilde{E}_r^{pq}$, $q \leq n - \frac{r-1}{r}p$, $r \geq r_0$: afin de démontrer cet énoncé avec $r + 1$ au lieu de r utilisons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E_r^{p-r, q+r-1} & \longrightarrow & E_r^{p, q} & \longrightarrow & E_r^{p+r, q-r+1} \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \tilde{E}_r^{p-r, q+r-1} & \longrightarrow & \tilde{E}_r^{p, q} & \longrightarrow & \tilde{E}_r^{p+r, q-r+1} \end{array}$$

pour $q \leq n - \frac{r-1}{r}p$.

Notons aussi que $E_r^{pq} = E_\infty^{pq}$ et $\tilde{E}_r^{pq} = \tilde{E}_\infty^{pq}$ si $p + q \leq n, r > n$.

e) Sur les groupes d'homotopie et systèmes locaux

Soit X une variété analytique réelle et Y un sous-ensemble analytique fermé de X . Le lemme suivant est géométriquement évident, nous fournissons une preuve qui n'utilise pas des arguments de transversalité:

10.9 Lemme. *Supposons que d est la codimension de Y dans X . Alors la paire $(X, X \setminus Y)$ est $d-1$ -connexe, c.-à d. $\pi_l(X \setminus Y, x) \rightarrow \pi_l(X, x)$, est bijectif pour $l \leq d-2$ et surjectif pour $l = d-1$, $x \in X \setminus Y$.*

Démonstration: On peut supposer que X est connexe de dimension n . Il y a une filtration $\emptyset = Y_{-1} \subset Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_{n-d} = Y$ où Y_k est analytique fermé de dimension k et $Y_k \setminus Y_{k-1}$ est lisse de dimension k . Il suffit de démontrer que $\pi_l(X \setminus Y_k, x) \simeq \pi_l(X \setminus Y_{k-1}, x)$, $x \in X \setminus Y_k, l \leq n-k-2$. En remplaçant $X \setminus Y_{k-1}$ par X on voit qu'il suffit de démontrer notre énoncé original dans le cas Y lisse.

Soit U un voisinage tubulaire de Y dans X , on a donc une rétraction $r : U \rightarrow Y$. Il suffit de montrer $\pi_l(U \setminus Y, x) \simeq \pi_l(U, x)$, $l \leq d-2, x \in U \setminus Y$, à cause du théorème de Blakers-Massey. Soit $F := r^{-1}(\{x\})$; alors F est homéomorphe à un disque de dimension $n-d$. Or, $r|_{U \setminus Y} : U \setminus Y \rightarrow Y$ définit une fibration; la suite exacte d'homotopie pour celle-ci donne: $\pi_l(U \setminus Y, x) \simeq \pi_l(Y, x)$, donc $\pi_l(U \setminus Y, x) \simeq \pi_l(U, x)$ pour $l \leq d-2$, ce qu'il fallait démontrer.

10.10 Lemme. *Soit \mathcal{L} un système local sur $X \setminus Y$ et Y de codimension ≥ 3 . Alors \mathcal{L} admet comme système local une extension à X qui est unique à isomorphie près, à savoir $j_*\mathcal{L}$, où $j : X \setminus Y \rightarrow X$ est l'inclusion.*

Démonstration: Avec les notations de la démonstration précédente, il suffit de démontrer par récurrence que $j_*\mathcal{L}$ est un système local sur $X \setminus Y_k$. On peut donc supposer que Y est lisse. Il suffit de montrer que $j_*\mathcal{L}|_U$ est un système local, U étant un voisinage convenable de $x \in Y$ dans X , ce qui est évident.

Ou bien on applique Lemme 10.9.

Bibliographie:

[BS] C. Bănică, O. Stănăşilă, Algebraic methods in the Global Theory of Complex Spaces, John Wiley, London, N.Y., Toronto, 1976.

[D] P. Deligne: Équations différentielles à points singuliers réguliers. Springer Lecture Notes in Math. **163** (1970).

- [FG] J. Frisch, J. Guenot: Prolongement de faisceaux analytiques cohérents. *Invent. Math.* **7**, 321-343 (1969).
- [Fr] J. Frenkel: Cohomologie non abélienne et espaces fibrés. *Bull. Soc. Math. France* **85**, 135-220 (1957).
- [G1] A. Grothendieck: Eléments de la Géométrie I. *Publ. Math. IHES* **4** (1960).
- [G2] A. Grothendieck: Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA II). North-Holland: Amsterdam 1968.
- [G3] A. Grothendieck, J.A.Dieudonné: Éléments de Géométrie Algébrique I. Springer: New York 1971.
- [G4] A. Grothendieck: Eléments de la Géométrie III, première partie. *Publ. Math. IHES* **11** (1961).
- [G5] A. Grothendieck: Eléments de la Géométrie III, seconde partie. *Publ. Math. IHES* **17** (1963).
- [Go] R. Godement: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann: Paris 1958.
- [GR] R. Gunning, H.Rossi: Analytic Functions of Several Complex Variables. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J. 1965.
- [H1] R. Hartshorne: Algebraic geometry. Springer: New York 1977.
- [H2] R. Hartshorne: Ample Subvarieties of Algebraic Varieties. Springer Lecture Notes in Math. **156** (1970).
- [Ha1] H.A. Hamm: On theorems of Zariski-Lefschetz type. In: Singularities II: Geometrical and topological aspects, pp. 69-78, ed. J.-P. Brasselet et al. *Contemporary Math.* **475**. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 2008.
- [Ha2] H.A. Hamm: On the local Picard group. *Proc. Steklov Inst. of Math.* **267**, 131-138 (2009).
- [Ha3] H.A. Hamm: Chow groups and tubular neighbourhoods. *J. Singul.* **2**, 81-91 (2010).
- [HL1] H.A. Hamm, Lê D.T.: Lefschetz theorems on quasi-projective varieties. *Bull. Soc. Math. France* **113**, 123-142 (1985).
- [HL2] H.A. Hamm, Lê D.T.: Théorèmes d'annulation et groupes de Picard. *J. Singul.* **1**, 13-36 (2010).

- [KK] L. Kaup, B. Kaup: Holomorphic functions of several variables. Walter de Gruyter: Berlin 1983.
- [M] H. Matsumura: Commutative ring theory. Cambridge Univ. Press: Cambridge 1986.
- [Ma] B. Malgrange: Regular Connections after Deligne. In: A. Borel et al.: Algebraic D -modules, Ch. IV, pp. 151-172. Perspectives in Math. Vol. 2. Acad. Press: Boston 1987.
- [Sch] G. Scheja: Fortsetzungssätze der komplex-analytischen Cohomologie und ihre algebraische Charakterisierung. Math. Ann. **57**, 75-94 (1964).
- [Si1] Y.-T. Siu: Extending coherent analytic sheaves. Ann. of Math. **90**, 108-143 (1969).
- [Si2] Y.-T. Siu: Analytic sheaves of local cohomology. Trans. Am. Math. Soc. **148**, 347-366 (1970).
- [Si3] Y.-T. Siu: Techniques of extension of analytic objects. Lecture Notes in Pure and Applied Math. **8**. Marcel Dekker: N.Y. 1974.
- [SiT] Y.-T. Siu, G. Trautmann: Gap-sheaves and extensions of coherent analytic subsheaves. Springer Lecture Notes in Math. **172** (1971).
- [T1] G. Trautmann: Ein Kontinuitätssatz für die Fortsetzung kohärenter analytischer Garben. Archiv der Math. **18**, 188-196 (1967).
- [T2] G. Trautmann: Ein Endlichkeitssatz in der analytischen Geometrie. Invent. Math. **8**, 143-174 (1969).